Układy Cramera

Dr Alina Gleska

Instytut Matematyki, Wydział Elektryczny,
Politechnika Poznańska

Definicja

Równaniem algebraicznym liniowym o n niewiadomych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy równanie postaci

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b,$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ są danymi liczbami rzeczywistymi.

Definicja

Układem m równań algebraicznych liniowych (w skrócie: układem m równań liniowych) o n niewiadomych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy zbiór m równań algebraicznych liniowych zawierających te zmienne:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ldots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Zauważmy, że układ taki można zapisać zwięźle jako

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,$$

dla $i = 1, 2, \ldots, m$ lub po prostu $AX = B$.

Chcemy obecnie zbadać, czy taki układ ma jedno, konkretne rozwiązanie; tzn. będziemy próbowali znaleźć takie liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$, które spełniają każde z tych równań. Mówimy, że układ jest oznaczony, jeżeli ma takie rozwiązanie. Jeżeli układ nie ma rozwiązania, to nazywamy go układem sprzecznym, a jeżeli ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od parametrów, to nazywamy go nieoznaczonym.

Twierdzenie

Każda z poniższych operacji elementarnych nie zmienia zbioru rozwiązań układu równań.

1. Zmiana kolejności równań.
2. Mnożenie dowolnego równania przez stałą różną od zera.
3. Dodanie do wybranego równania innego równania przemnożonego przez stałą.

Definicja

Układ równań liniowych nazywamy układem jednorodnym, jeżeli kolumna wyrazów wolnych jest złożona z samych zer, tzn.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ldots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

lub $AX = 0$. Układ równań liniowych nazywamy niejednorodnym, jeżeli $B \neq 0$. Układ równań liniowych $AX = B$ nazywamy układem Cramera, jeżeli macierz A jest odwracalna, tzn. $\det(A) \neq 0$.

Twierdzenie - postać rozwiązań układu Cramera

Układ n równań liniowych o n niewiadomych $AX = B$ ma jednoznaczne rozwiązanie, jeżeli $\det(A) \neq 0$. Rozwiązanie to dane jest wzorami

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)},$$

gdzie A_i, dla $i \in \{1, \dots, n\}$, są macierzami powstałymi z macierzy A przez zastąpienie i-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Przykład

Rozwiązać układ równań liniowych Cramera:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Mamy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

Możemy teraz obliczyć wyznaczniki oraz wartości niewiadomych x_i.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2+1+0-(-4-2+0) = 3-(-6) = 9,$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2-3+8-(12+2-2) = 7-12 = -5$$

oraz

$$x_1 = -\frac{5}{9};$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2+1+0-(-4-3+0) = 3-(-7) = 10$$

oraz

$$x_2 = \frac{10}{9};$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6-2+0-(-2+4+0) = 4-2 = 2$$

oraz

$$x_3 = \frac{2}{9}.$$

Definicja

Macierz $A \in M_{n\times n}$ nazywamy odwracalną, jeżeli istnieje macierz $B \in M_{n\times n}$ taka, że

$$AB = I_n = BA.$$

Dowolną macierz B o tej własności nazywamy macierzą odwrotną do macierzy A. Jeżeli macierz A nie ma macierzy odwrotnej, to nazywamy ją macierzą osobliwą.

Macierz odwrotna jest jedyna, tzn. jeśli macierz A ma dwie macierze odwrotne B i C, to $B = C$.

Uwaga

Jeżeli macierz A ma macierz odwrotną, to oznaczamy ją jako A^{-1}. Zatem

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A.$$

Uwaga

Niech $A, B \in M_{n\times n}$. Wówczas spełnione są następujące warunki.

1. Jeżeli macierz A jest odwracalna, to macierz A^{-1} jest również odwracalna i $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. Jeżeli macierze A i B są odwracalne, to macierz AB jest również odwracalna i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3. Jeżeli macierz A jest odwracalna, to $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Definicja - dopełnienie algebraiczne

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy A, oznaczanym przez $D_{ij}(A)$ (w skrócie D_{ij}) nazywamy liczbę

$$D_{ij}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij}(A).$$

Aby wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy A, tworzymy macierz pomocniczą D złożoną z dopełnień algebraicznych:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & \cdots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & \cdots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & D_{n3} & \cdots & D_{nn} \end{bmatrix}.$$

Definicja - macierz odwrotna

Jeżeli $\det(A) \neq 0$, to A jest macierzą nieosobliwą (odwracalną), a jej macierz odwrotna wyraża się wzorem:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} D^T.$$

Twierdzenie

Układ Cramera ma jednoznaczne rozwiązanie postaci:

$$X = A^{-1} B.$$

Przykład

Rozwiązać poniższy układ Cramera metodą macierzy odwrotnej:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Mamy teraz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2+1+0-(-4-2+0) = 3-(-6) = 9,$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2-(-2) = 4 \quad \text{i} \quad D_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 4;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0-1 = -1 \quad \text{i} \quad D_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = 1;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0-(-2) = 2 \quad \text{i} \quad D_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = 2;$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \quad \text{i} \quad D_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = 3;$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-2) = 3 \quad \text{i} \quad D_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 3;$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-1) = 3 \quad \text{i} \quad D_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -3;$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \quad \text{i} \quad D_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = -5;$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1 \quad \text{i} \quad D_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = 1;$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \quad \text{i} \quad D_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = 2;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\left[\begin{array}{rrr} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \end{array}\right]^T = \frac{1}{9}\left[\begin{array}{rrr} 4 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{array}\right],$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{9}\left[\begin{array}{rrr} 4 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right] = \frac{1}{9}\left[\begin{array}{r} -5 \\ 10 \\ 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r} -5/9 \\ 10/9 \\ 2/9 \end{array}\right]$$