# Eliminacja Gaussa

Dr Alina Gleska

Instytut Matematyki, Wydział Elektryczny,
Politechnika Poznańska

### Definicja

Rzędem macierzy $A$ wymiaru $m \times n$ nazywamy stopień największego różnego od zera wyznacznika podmacierzy zawartej w tej macierzy. Rząd macierzy oznaczamy przez r(A).

### Twierdzenie

Zachodzą następujące własności:

1. rząd macierzy nieosobliwej $A_{n\times n}$ jest równy jej wymiarowi $n$, tzn. jeżeli $\det(A_{n\times n}) \neq 0$, to $r(A_{n\times n}) = n$;
2. dla dowolnej $m \times n$ macierzy $A$ mamy $r(A) = r(A^T)$.

### Twierdzenie

Żadna z poniższych operacji nie zmienia rzędu macierzy $A_{m\times n}$.

1. Zmiana kolejności dwóch wierszy lub dwóch kolumn.
2. Przemnożenie całego wiersza lub całej kolumny przez stałą różną od zera.
3. Zastąpienie wybranego wiersza przez sumę tego wiersza oraz innego wiersza przemnożonego przez stałą różną od zera (to samo dotyczy kolumn).

## Twierdzenie Kroneckera-Capelliego

Warunkiem koniecznym i dostatecznym rozwiązalności układu równań algebraicznych liniowych $AX = B$ jest równość rzędów macierzy $A$ i macierzy rozszerzonej (uzupełnionej) $U = [A|B]$, tzn.

$$r(A) = r(U).$$

Jeżeli $r$ oznacza wspólny rząd obu macierzy, to

1. jeżeli $r = n$, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie;
2. jeżeli $r < n$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, które zależą od $n - r$ parametrów;
3. jeżeli $r(A) \neq r([A|B]) = r(U)$, to układ nie ma rozwiązań.

### Twierdzenie

Żadna z poniższych operacji elementarnych nie zmienia rozwiązań układu równań liniowych $AX = B$.

1. Zmiana kolejności dwóch wierszy.
2. Przemnożenie dowolnego wiersza przez stałą różną od zera.
3. Zastąpienie wybranego wiersza przez sumę tego wiersza oraz innego wiersza przemnożonego przez stałą różną od zera.
4. Usunięcie wiersza złożonego z samych zer.

## Jak znaleźć rozwiązanie układu Cramera korzystając z metody eliminacji Gaussa-Jordana

Załóżmy, że $AX = B$ jest układem Cramera, gdzie $A$ jest macierzą kwadratową wymiaru $n \times n$, a $B$ jest $n$- wymiarowym wektorem. Aby znaleźć rozwiązanie układu $AX = B$ postępujemy według schematu:
(1). Tworzymy macierz rozszerzoną

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array} \right].$$

(2). Stosując operacje elementarne doprowadzamy wyjściową macierz rozszerzoną do $n \times (n+1)$ macierzy postaci

$$[I|X] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x_n \end{array}\right],$$

gdzie $X$ jest rozwiązaniem układu równań.

### Przykład

Rozwiązać układ Cramera:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Mamy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

Tworzymy macierz rozszerzoną, a potem wykonujemy operacje elementarne tak długo, aż otrzymamy wartości niewiadomych $x_i$.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

Teraz mnożymy drugi wiersz przez (-1) i dodajemy do trzeciego, a następnie zamieniamy kolejnością wiersz drugi i trzeci:

$$\to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & -2 \end{array}\right]$$

Dzielimy ostatni wiersz przez (-9):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5/9 \\ 0 & 1 & 0 & 10/9 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/9 \\ 0 & 1 & 0 & 10/9 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 \end{array}\right] \Rightarrow x_1 = -5/9, \quad x_2 = 10/9, \quad x_3 = 2/9.$$

## Jak znaleźć rozwiązanie dowolnego układu równań liniowych korzystając z metody eliminacji Gaussa-Jordana

Niech $AX = B$ będzie układem równań liniowych, gdzie $A$ jest macierzą wymiaru $m \times n$, a $B$ jest $m$- wymiarowym wektorem. Aby znaleźć rozwiązania tego układu postępujemy według schematu:
(1). Tworzymy macierz rozszerzoną

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right].$$

(2). Wykonujemy operacje elementarne tak długo, aż otrzymamy $m \times (n+1)$ macierz postaci:

$$[A'|Z] = \left[\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_{1(r+1)} & \dots & s_{1n} & z_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_{2(r+1)} & \dots & s_{2n} & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_{r(r+1)} & \dots & s_{rn} & z_r \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & z_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & z_m \end{array}\right]$$

gdzie ostatnie wiersze mogą nie wystąpić lub być postaci $z_{r+1} \neq 0, \dots, z_m \neq 0$.

(3). Odczytujemy rozwiązania:
(a) jeżeli $z_j \neq 0$ dla pewnego $j \in \{r+1, \ldots, m\}$, to układ $AX = B$ nie ma rozwiązań (jest sprzeczny);
(b) jeżeli ostatnie wiersze macierzy $[A'|Z]$ nie pojawiły się oraz $r = n$, to układ $AX = B$ jest równoważny układowi Cramera i ma dokładnie jedno rozwiązanie: $z_1 = x_1, z_2 = x_2, \ldots, z_n = x_n$;
(c) jeżeli ostatnie wiersze macierzy $[A'|Z]$ nie pojawiły się oraz $r < n$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_r$ są liniowo zależne od $n - r$ parametrów $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$.

## Przykład

Rozwiązać układ:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Zaczynamy od utworzenia macierzy rozszerzonej:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -8 & 4 & 7 & 7 \\ 2 & -5 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

Teraz mnożymy pierwszy wiersz przez (-1) i dodajemy do drugiego; następnie mnożymy pierwszy wiersz przez (-3) i dodajemy do trzeciego; na końcu mnożymy pierwszy wiersz przez (-2) i dodajemy do czwartego:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -8 & 4 & 7 & 7 \\ 2 & -5 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & -2 & -8 & -8 \\ 0 & 3 & -3 & -8 & -7 \end{array}\right]$$

Zamieniamy kolejnością wiersz drugi i czwarty:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & -2 & -8 & -8 \\ 0 & 3 & -3 & -8 & -7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -8 & -7 \\ 0 & 4 & -2 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -4 \end{array}\right]$$

Teraz mnożymy drugi wiersz przez (-1) i dodajemy do trzeciego. Ponadto dzielimy czwarty wiersz przez (-2).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -8 & -7 \\ 0 & 4 & -2 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -8 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Zamieniamy kolejnością wiersz drugi i trzeci:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -8 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Mnożymy drugi wiersz przez (-3) i dodajemy do trzeciego:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Zamieniamy kolejnością wiersz trzeci i czwarty:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -8 & -4 \end{array}\right]$$

Mnożymy trzeci wiersz przez 6 i dodajemy do czwartego:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -8 & -4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right]$$

Stosując tzw. podstawienie wsteczne odczytujemy rozwiązania:

- $4x_4 = 8 \Rightarrow x_4 = 2;$
- $x_3 + 2x_4 = 2 \Rightarrow x_3 = -2;$
- $x_2 + x_3 = -1 \Rightarrow x_2 = 1;$
- $x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 5 \Rightarrow x_1 = 3.$

## Przykład

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$$

Zaczynamy od utworzenia macierzy rozszerzonej, a następnie ją przekształcamy:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 16 & -16 & 22 & -6 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 16 & -16 & 22 & -6 \\ 0 & -15 & 15 & -15 & -6 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & -15 & 15 & -15 & -6 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & 83 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 90 & -186 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -360 & 747 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 360 & -744 \end{array}\right]$$

Otrzymaliśmy sprzeczność! A to oznacza, że nasz układ nie ma rozwiązań.

## Przykład

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 7x_4 - 5x_5 = 5 \end{cases}$$

Najpierw tworzymy macierz rozszerzoną,a następnie ją przekształcamy:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 6 & -5 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 7 & -5 & 5 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & 4 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & 4 & 1 & -4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Jak widzimy, otrzymaliśmy trzy parametry: $x_3$, $x_4$ i $x_5$. Możemy teraz obliczyć $x_1$ i $x_2$:

$$x_2 = 1 - 2x_3 + x_4 + 0.25x_5,$$

$$x_1 = 3 - x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 =$$

$$= 3 - 1 + 2x_3 - x_4 - 0.25x_5 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 - 2x_4 + 1.75x_5$$

## Wykorzystanie metody eliminacji Gaussa-Jordana do wyznaczania macierzy odwrotnych

Tworzymy macierz rozszerzoną $[A, I]$, a następnie korzystając z operacji elementarnych przekształcamy ją do postaci $[I, B]$. Wówczas macierz $B$ będzie macierzą odwrotną do macierzy $A$, tzn. $B = (A)^{-1}$.

### Przykład

Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Odp. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 19 & -3 & -7 \\ 13 & -2 & -5 \end{bmatrix}$.