Całka nieoznaczona

Dr Alina Gleska

Instytut Matematyki, Wydział Elektryczny,
Politechnika Poznańska

Całkowanie funkcji wymiernych

Dowolną funkcję wymierną można scałkować korzystając z rozkładu na ułamki proste postaci:

$$\frac{c}{(ax+b)^n} \quad \text{lub} \quad \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}, \quad \text{gdzie} \quad \Delta = p^2 - 4q < 0.$$

Jak scałkować funkcję wymierną $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$?

1. Jeśli stopień wielomianu P $m \geq n$ (czyli stopnia wielomianu Q), wykonaj dzielenie wielomianów; w przeciwnym razie idź do kroku 2.
2. Rozłóż mianownik $Q(x)$ na iloczyn nieredukowalnych wielomianów: liniowych i nieredukowalnych wielomianów kwadratowych.
3. Wykonaj rozkład na ułamki proste.
4. Scałkuj wyniki z kroku 3.

Obecnie rozważymy cztery przypadki rozkładu na ułamki proste.

Przypadek I. Niepowtarzające się czynniki liniowe

Następujące twierdzenie przedstawimy bez dowodu. Jeśli

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_nx+b_n)},$$

gdzie wszystkie czynniki a_ix+b_i, $i=1,2,\ldots,n$ są różne, a stopień wielomianu $P(x)$ jest mniejszy niż n, to istnieją jednoznaczne stałe rzeczywiste C_1, C_2, ..., C_n takie, że

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C_1}{a_1x+b_1} + \frac{C_2}{a_2x+b_2} + \ldots + \frac{C_n}{a_nx+b_n}.$$

Przypadek II. Powtarzające się czynniki liniowe

Jeśli
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(ax+b)^n},$$
gdzie $n > 1$ oraz stopień wielomianu $P(x)$ jest mniejszy niż n, to istnieją jednoznaczne stałe rzeczywiste C_1, C_2, ..., C_n takie, że
$$\frac{P(x)}{(ax+b)^n} = \frac{C_1}{ax+b} + \frac{C_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(ax+b)^n}.$$

Przypadek III. Niepowtarzające się czynniki kwadratowe
Jeśli stopień wielomianu $P(x)$ jest mniejszy niż $2n$, to istnieją jednoznaczne stałe rzeczywiste $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ takie, że

$$\frac{P(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\ldots(a_nx^2+b_nx+c_n)} =$$

$$= \frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{a_nx^2+b_nx+c_n}.$$

Przypadek IV. Powtarzające się czynniki kwadratowe
Załóżmy, że wyrażenie podcałkowe jest postaci $P(x)/(ax^2+bx+c)^n$, gdzie ax^2+bx+c jest nieredukowalny oraz $n>1$. Jeżeli stopień wielomianu $P(x)$ jest mniejszy niż $2n$, możemy wyznaczyć w sposób jednoznaczny stałe A_1, A_2,...,A_n, B_1, B_2, ..., B_n takie, że

$$\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} +$$

$$+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

Przykład.

1. $\int \frac{1}{x} dx$, $\int \frac{1}{ax+b} dx$, $\int \frac{1}{(ax+b)^k} dx$
2. $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$
   - $\Delta = 0$: $\int \frac{dx}{9x^2-12x+4}$
   - $\Delta < 0$: $\int \frac{dx}{2x^2-12x+27}$
   - $\Delta > 0$: $\int \frac{dx}{3x^2-5x-2}$
3. $\int \frac{ex+f}{ax^2+bx+c} dx$
   - $\Delta = 0$: $\int \frac{8x-5}{9x^2-6x+1} dx$
   - $\Delta < 0$: $\int \frac{3x+1}{x^2+4x+5} dx$
   - $\Delta > 0$: $\int \frac{11x-1}{3x^2-5x-2} dx$

Przykład.

Obliczyć całki: $\int \frac{x^5+2}{x^2-1}dx$ oraz $\int \frac{x^6-2}{x^4+x^2}dx$.

Całkowanie funkcji niewymiernych

Kiedy funkcja podcałkowa zawiera całkowite potęgi x i całkowite potęgi któregoś z wyrażeń

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \sqrt{a^2 + x^2}, \quad \text{lub} \quad \sqrt{x^2 - a^2}, \quad a > 0,$$

możemy obliczyć całki korzystając z podstawienia funkcji trygonometrycznych. W tym celu skorzystamy z podstawowych tożsamości trygonometrycznych:

$$1 - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta);$$

$$1 + \mathrm{tg}^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)} = \sec^2(\theta).$$

Przypadek I. Funkcja podcałkowa zawiera $\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$
Przyjmujemy $x = a \cdot \sin(\theta)$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Wówczas

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2(\theta)} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2(\theta))} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2(\theta)} = a \cdot \cos(\theta).\end{aligned}$$

Kiedy $\sqrt{a^2 - x^2}$ występuje w mianowniku funkcji podcałkowej, musimy przyjąć dalsze ograniczenia: $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

Przykład.
Obliczyć całkę $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$.
Rozwiązanie. Przyjmując $a = 3$ otrzymujemy równania:

$$x = 3\sin(\theta), \quad dx = 3\cos(\theta)d\theta,$$

gdzie $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Wówczas całka ma postać:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int \frac{9\sin^2(\theta)}{\sqrt{9-9\sin^2(\theta)}}(3\cos(\theta)d\theta) = 9\int \sin^2(\theta)d\theta.$$

Przypomnijmy, że $\sin^2(\theta) = (1-\cos(2\theta))/2$, zatem

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \frac{9}{2}\int (1-\cos(2\theta))d\theta = \frac{9}{2}\theta - \frac{9}{4}\sin(2\theta) + C.$$

Aby wyrazić wynik względem zmiennej x zauważmy, że $\sin(\theta) = x/3$, $\cos(\theta) = \sqrt{1-\sin^2(\theta)} = \sqrt{9-x^2}/3$ oraz $\theta = \arcsin(x/3)$. Ponieważ $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$, to

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + C.$$

Przypadek II. Funkcja podcałkowa zawiera $\sqrt{a^2+x^2}$, $a>0$
Przypuśćmy, że $x = a \cdot \mathrm{tg}(\theta)$, gdzie $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Wówczas

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+x^2} &= \sqrt{a^2+a^2\,\mathrm{tg}^2(\theta)} = \sqrt{a^2(1+\mathrm{tg}^2(\theta))} \\ &= \sqrt{a^2\sec^2(\theta)} = a\cdot\sec(\theta).\end{aligned}$$

Przykład.
Obliczyć całkę $\int \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}}$.
Rozwiązanie. Zauważmy, że funkcja podcałkowa jest całkowitą potęgą wyrażenia $\sqrt{4+x^2}$, ponieważ $(4+x^2)^{3/2} = (\sqrt{4+x^2})^3$. Ponieważ

$$x = 2\,\mathrm{tg}(\theta), \quad dx = \frac{2}{\cos^2(\theta)}d\theta = 2\sec^2(\theta)d\theta,$$

to $\sqrt{4+x^2} = 2\sec(\theta)$ oraz $(4+x^2)^{3/2} = 8\sec^3(\theta)$. Zatem

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}} = \int \frac{2\sec^2(\theta)d\theta}{8\sec^3(\theta)} = \frac{1}{4}\int \cos(\theta)d\theta = \frac{1}{4}\sin(\theta) + C.$$

Korzystając z trójkąta prostokątnego, ze względu na fakt, że $\text{tg}(\theta) = \frac{x}{2}$, możemy zauważyć, że $\sin(\theta) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$. A zatem

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + C.$$

Przypadek III. Funkcja podcałkowa zawiera $\sqrt{x^2 - a^2}$, $a > 0$
W tym ostatnim przypadku, jeżeli użyjemy podstawienia $x = a \cdot \sec(\theta)$, gdzie $0 \leq \theta < \pi/2$ lub $\pi \leq \theta < 3\pi/2$, to

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - a^2} &= \sqrt{a^2 \sec^2(\theta) - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2(\theta) - 1)} \\ &= \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2(\theta)} = a \cdot \operatorname{tg}(\theta).\end{aligned}$$

Przykład.
Obliczyć całkę $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4} dx$.
Rozwiązanie. Przyjmując $x = 4\sec(\theta)$ dostajemy $dx = 4\sec(\theta)\operatorname{tg}(\theta)d\theta$ oraz

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4} dx &= \int \frac{\sqrt{16\sec^2(\theta)-16}}{256\sec^4(\theta)}(4\sec(\theta)\operatorname{tg}(\theta))d\theta \\
&= \frac{1}{16}\int \frac{\operatorname{tg}^2(\theta)}{\sec^3(\theta)}d\theta = \frac{1}{16}\int \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}\cos^3(\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{16}\int \sin^2(\theta)(\cos(\theta))d\theta = \frac{1}{48}\sin^3(\theta) + C.
\end{aligned}$$

Korzystając z trójkąta prostokątnego widzimy, że jeśli $\sec(\theta) = x/4$, to $\cos(\theta) = 4/x$ oraz $\sin(\theta) = \sqrt{x^2 - 16}/x$. A zatem

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x^4} dx = \frac{1}{48} \frac{(x^2 - 16)^{3/2}}{x^3} + C.$$

Podstawienia Eulera dla całek typu $\int F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$
Istnieją trzy różne podstawienia Eulera:

1. $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\,x$ dla $a > 0$,
2. $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + xt$ dla $c > 0$,
3. $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$, gdzie α jest jednym z pierwiastków wielomianu kwadratowego $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

t oznacza nową zmienną.

Przykład.
Obliczyć całkę $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.
Rozwiązanie. Skorzystamy z pierwszego podstawienia: $\sqrt{x^2-x+1} = t - x$, ponieważ $a = 1$. Wówczas $x + \sqrt{x^2-x+1} = t$. Podnosząc pierwsze równanie obustronnie do kwadratu mamy:

$$x^2 - x + 1 = t^2 - 2tx + x^2 \Leftrightarrow x(2t-1) = t^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t-1}.$$

Możemy teraz obliczyć dx.

Jeśli $x = \frac{t^2-1}{2t-1}$, to

$$\begin{aligned} dx &= \frac{2t(2t-1)-(t^2-1)2}{(2t-1)^2}dt = \frac{4t^2-2t-2t^2+2}{(2t-1)^2}dt \\ &= \frac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2}dt. \end{aligned}$$

Wstawiając powyższe wyrażenia do całki otrzymamy:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2 t}dt.$$

Korzystając z dobrze znanego rozkładu na ułamki proste mamy:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2 t}dt &= \int \frac{2}{t} - \frac{3}{2t-1} + \frac{3}{(2t-1)^2}dt \\
&= 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t-1| + \frac{3}{2}\frac{-1}{2t-1} + C \\
&= 2\ln|x+\sqrt{x^2-x+1}| \\
&\quad -\frac{3}{2}\ln|2(x+\sqrt{x^2-x+1})-1| \\
&\quad -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2(x+\sqrt{x^2-x+1})-1} + C.
\end{aligned}
$$