Całka oznaczona

Dr Alina Gleska

Instytut Matematyki, Wydział Elektryczny,
Politechnika Poznańska

Całka oznaczona

Rozważmy obecnie następującą sytuację.

1. Niech funkcja f będzie funkcją ciągłą zdefiniowaną na przedziale zamkniętym $[a, b]$.
2. Dzielimy przedział $[a, b]$ na n podprzedziałów $[x_{k-1}, x_k]$ dowolnie wybranymi punktami x_0, x_1, ..., x_n. Każdy podprzedział jest długości $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Niech P oznacza podział przedziału $[a, b]$:
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$
3. Niech $||P||$ będzie długością najdłuższego podprzedziału. Liczbę $||P||$ nazywamy średnicą podziału P.
4. W każdym z podprzedziałów wybieramy w sposób dowolny jeden punkt x_k^*, który nazywamy punktem pośrednim.
5. Tworzymy sumę całkową: $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$.

Dla dowolnej liczby naturalnej $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$ budujemy podział przedziału $[a, b]$ tworząc w ten sposób ciąg podziałów przedziału $[a, b]$ i odpowiadający mu ciąg średnic (Δ_m). Jeżeli

$$\lim_{m \to \infty} \Delta_m = 0,$$

to taki ciąg nazywamy ciągiem normalnym podziałów. Odpowiadający mu ciąg sum całkowych oznaczamy przez (S_m).

Jeżeli dla każdego ciągu normalnego podziałów przedziału $[a, b]$ ciąg (S_m) dąży do tej samej skończonej granicy, która nie zależy od wyboru punktów pośrednich x_k^*, to granicę tę nazywamy całką oznaczoną funkcji f w przedziale $[a, b]$ i oznaczamy jako $\int_a^b f(x)dx$. Zatem całkę oznaczoną możemy zdefiniować następująco:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k.$$

Liczby a i b występujące w całce nazywamy dolną i górną granicą całkowania, odpowiednio.

Theorem

Jeśli f jest ciągła na $[a,b]$, *to* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *istnieje; mówimy wtedy, że funkcja f jest całkowalna na przedziale.*

Theorem

Jeśli $f(a)$ *istnieje, to* $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

Theorem

Jeśli f jest całkowalna na przedziale $[a,b]$, *to*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$$

Theorem

Niech f i g będą funkcjami całkowalnymi na przedziale $[a, b]$. Wówczas:

1. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$*, gdzie k jest dowolną stałą,*
2. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$*, (własność tę można rozszerzyć na dowolną skończoną sumę funkcji całkowalnych na przedziale $[a, b]$),*
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$*, gdzie c jest dowolną stałą z przedziału $[a, b]$.*

Oczywiście wartość całki oznaczonej nie zależy od użytego symbolu (czyli nazwy zmiennej). Innymi słowy,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(r)dr = \int_a^b f(t)dt,$$

itd.

Interpretacja geometryczna całek oznaczonych

Theorem

Dla dowolnej stałej k, $\int\limits_a^b k \cdot dx = k \cdot \int\limits_a^b dx = k(b-a)$.

Theorem

Jeśli f jest funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$, to istnieje punkt $c \in [a, b]$ taki, że

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Theorem (Zasadnicze Twierdzenie Rachunku Całkowego)

Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$ oraz niech F będzie dowolną funkcją pierwotną funkcji f (tzn. $F'(x) = f(x)$). Wówczas

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Uwaga.

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx|_a^b = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Całkowanie przez podstawienie można przeprowadzić na dwa sposoby:

1. wyznaczyć całkę nieoznaczoną stosując podstawienie $t = g(x)$, a następnie powrócić do x - dalej korzystając z Zasadniczego Twierdzenia Rachunku Całkowego uzyskać wynik dla wyjściowych granic całkowania $x = a$ i $x = b$;
2. alternatywnie, unikamy powrotu do zmiennej x korzystając z zamiany granic całkowania (obliczamy wartości t dla $x = a$ i $x = b$ - ta metoda jest znacznie szybsza).

Theorem (Całkowanie przez podstawienie)

Niech $t = g(x)$ będzie funkcją, która ma ciągłą pochodną na przedziale $[a, b]$ oraz niech f będzie funkcją ciągłą na zbiorze wartości funkcji g. Jeśli $F'(t) = f(t)$ oraz $c = g(a)$, $d = g(b)$, to

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(d) - F(c).$$

Przykład.

Obliczyć całkę: $\int\limits_0^2 x\sqrt{4 - x^2}dx$.

Theorem (Całkowanie przez części)

Jeśli funkcje f, g, f' oraz g' są ciągłe na pewnym przedziale $[a,b]$, to

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Przykład.

Obliczyć całkę: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos(x)dx$.