Całka oznaczona - zastosowania

Dr Alina Gleska

Instytut Matematyki, Wydział Elektryczny,
Politechnika Poznańska

Przypomnijmy, że całkę oznaczoną możemy wykorzystać do obliczania pól obszarów ograniczonych wykresami funkcji.

Przykład.

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji:

1. $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 3x$
2. $y^2 = 4x + 4$, $y = 2 - x$.

Długość łuku

Jeżeli funkcja $y = f(x)$ posiada ciągłą pierwszą pochodną na przedziale $[a, b]$, to mówimy, że jej wykres jest krzywą gładką, a samą funkcję f nazywamy funkcją gładką. Jak sama nazwa wskazuje, gładkie krzywe nie mają ostrzy. Obecnie zajmiemy się wyznaczaniem długości takich gładkich łuków.

Niech f będzie funkcją gładką na przedziale $[a, b]$ oraz niech P oznacza dowolny podział przedziału $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Jak zwykle, długość każdego podprzedziału oznaczamy przez $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Przez $||P||$ oznaczamy długość najdłuższego podprzedziału. Długość łamanej łączącej punkty $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ i $(x_k, f(x_k))$ jest przybliżeniem długości fragmentu wykresu leżącego między tymi punktami. Długość łamanej wyraża się wzorem:

$$\Delta S_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Korzystając z twierdzenia o wartości średniej wiemy, że w każdym z podprzedziałów otwartych (x_{k-1}, x_k) istnieje punkt pośredni x_k^*, dla którego prawdziwy jest warunek

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(x_k^*),$$

czyli

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(x_k^*)(x_k - x_{k-1}).$$

Wstawiając to równanie do poprzedniego otrzymamy, że

$$\Delta S_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f'(x_k))^2 (x_k - x_{k-1})^2} =$$

$$= \sqrt{1 + (f'(x_k^*))^2}(x_k - x_{k-1}) = \sqrt{1 + (f'(x_k^*))^2}\Delta x_k.$$

Suma

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+(f'(x_k^*))^2}\Delta x_k$$

jest przybliżeniem całkowitej długości łuku na przedziale $[a, b]$.
Jeżeli $||P|| \to 0$ (czyli P jest podziałem normalnym), to:

$$\lim_{||P||\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+(f'(x_k^*))^2}\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Definicja

Niech f będzie funkcją, której pochodna f' jest ciągła na przedziale $[a, b]$. Długość S wykresu funkcji dla danego przedziału, czyli długość łuku, jest dana wzorem

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Przykład.

Wyznacz długość S wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ dla $x \in [0, 1]$.

Objętość bryły obrotowej

I przypadek – niech D będzie obszarem ograniczonym przez wykres nieujemnej funkcji ciągłej $y = f(x)$, oś x oraz linie pionowe $x = a$ i $x = b$. Jeżeli będziemy obracali ten obszar D wokół osi x, to otrzymamy bryłę obrotową o pewnej objętości V.

Objętość otrzymanej bryły wyznaczamy ze wzoru:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Przykład.
Wyznaczyć objętość stożka o wysokości h i promieniu podstawy R.

II przypadek – niech D będzie obszarem ograniczonym przez wykresy dwóch nieujemnych funkcji ciągłych $y = f(x)$, $y = g(x)$ oraz liniami $x = a$ i $x = b$. Jeżeli będziemy obracali ten obszar D wokół osi x, to otrzymamy bryłę obrotową o pewnej objętości V.

Objętość otrzymanej bryły wyznaczamy ze wzoru:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx - \pi \int_a^b (g(x))^2 dx = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx.$$

Pole powierzchni bocznej bryły obrotowej

Niech D będzie obszarem ograniczonym przez wykres nieujemnej funkcji ciągłej $y = f(x)$, oś x oraz linie pionowe $x = a$ i $x = b$. Jeżeli będziemy obracali ten obszar D wokół osi x, to otrzymamy bryłę obrotową o pewnym polu powierzchni bocznej P_B.

Pole powierzchni bocznej otrzymanej bryły wyznaczamy ze wzoru:

$$P_B = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$