Całka niewłaściwa

Dr Alina Gleska

Instytut Matematyki, Wydział Elektryczny,
Politechnika Poznańska

Do tej pory, mówiąc o całce oznaczonej $\int_a^b f(x)dx$, zakładaliśmy, że

- granice całkowania są skończonymi liczbami oraz
- funkcja f była albo ciągła na przedziale $[a, b]$, albo, jeśli nie była ciągła to była ograniczona na tym przedziale.

Jeżeli którykolwiek z tych dwóch warunków nie jest spełniony, to mówimy o całce niewłaściwej.

Jeżeli funkcja f jest zdefiniowana na nieograniczonym przedziale, to możemy mieć do czynienia z trzema możliwymi przypadkami całek z nieograniczonymi granicami całkowania. Poniżej zamieszczono ich definicje.

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, \infty)$, to

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{\beta \to \infty} \int_a^{\beta} f(x)dx.$$

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $(-\infty, b]$, to

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{b} f(x)dx.$$

Jeżeli funkcja f jest ciągła dla wszystkich x, zaś a jest *dowolną* liczbą rzeczywistą, to

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx.$$

Jeżeli istnieją skończone granice pierwszych dwóch całek, to nazywamy je zbieżnymi. Jeżeli granica ta nie istnieje lub jest równa $(\pm\infty)$, to całkę nazywamy rozbieżną. W ostatniej formule, całka $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy obie całki $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ i $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ są zbieżne. Innymi słowy, jeżeli jedna z całek składowych jest rozbieżna, to całka $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ jest rozbieżna niezależnie od wartości granicy drugiej całki.

Przykład.

Wyznaczyć całkę: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Rozważmy teraz całki, w których funkcja podcałkowa jest nieograniczona. Całki takie nazywamy całkami niewłaściwymi II rodzaju. Formalnie, całka $\int_a^b f(x)dx$ jest również niewłaściwa, jeżeli funkcja f ma nieskończoną nieciągłość w pewnym punkcie przedziału całkowania (np. w sytuacji dzielenia przez 0). Możemy rozróżnić trzy takie sytuacje.

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b)$ oraz $|f(x)| \to \infty$ przy $x \to b^-$, to

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)dx.$$

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $(a, b]$ oraz $|f(x)| \to \infty$ przy $x \to a^+$, to

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(x)dx.$$

Jeżeli $|f(x)| \to \infty$ przy $x \to c$ dla pewnego $c \in (a, b)$ oraz funkcja f jest ciągła dla wszystkich pozostałych argumentów z przedziału $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Podobnie jak poprzednio mówimy, że całka niewłaściwa jest zbieżna lub rozbieżna - odpowiednio, jeżeli zdefiniowane wcześniej granice istnieją i są skończone, bądź nie istnieją. W ostatniej formule, całka $\int_a^b f(x)dx$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy obie całki $\int_a^c f(x)dx$ i $\int_c^b f(x)dx$ są zbieżne.

Przykład.

Sprawdź:

$$\int_0^{3a} \frac{2x}{(x^2 - a^2)^{2/3}} dx = 9a^{2/3}.$$