Szeregi liczbowe

Dr Alina Gleska

Instytut Matematyki, Wydział Elektryczny,
Politechnika Poznańska

Pojęcie szeregu liczbowego jest blisko związane z pojęciem ciągu liczbowego. Jeśli (a_n) jest ciągiem o wyrazach $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, to poniższą sumę

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

nazywamy szeregiem liczbowym. Liczby a_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ nazywamy wyrazami szeregu; a_n nazywamy wyrazem ogólnym. Powyższą sumę zapisujemy zwięźle jako $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Definicja

Ciągiem sum częściowych (S_n) powiązanym z szeregiem nieskończonym $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, nazywamy wyrażenie

$$
\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Definicja

Szereg nieskończony $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nazywamy zbieżnym, jeżeli ciąg sum częściowych (S_n) jest zbieżny, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S.$$

Liczbę skończoną S nazywamy sumą szeregu. Fakt zbieżności szeregu będziemy oznaczać jako: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$.

Definicja

Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ nie istnieje lub jest równy $(\pm\infty)$, to szereg nazywamy rozbieżnym. Fakt ten oznaczamy następująco: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$.

Przykład.

Szereg postaci

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$$

nazywamy szeregiem geometrycznym. Szereg geometryczny jest zbieżny do $\frac{a}{1-r}$ dla $|r| < 1$ oraz rozbieżny dla $|r| \geq 1$, $a \neq 0$.

Przykład.
Innym przykładem szeregu rozbieżnego jest szereg harmoniczny:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Theorem

Jeżeli $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$*, to* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*.*

Uwaga.

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, to ciąg nie musi być zbieżny (patrz: szereg harmoniczny). To oznacza, że poprzedniego twierdzenia nie można odwrócić.

Theorem

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$*, to* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$*.*

Theorem

Jeżeli c jest dowolną stałą, to $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *oraz* $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k$ *są równocześnie zbieżne albo równocześnie rozbieżne.*

Theorem

Jeżeli $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_1$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_2$, *odpowiednio, to*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = S_1 + S_2.$$

Theorem

Jeżeli $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$, *to* $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \infty$.

Bardzo trudno jest wykazać zbieżność lub rozbieżność szeregów korzystając jedynie z własności ciągu sum częściowych. Jednakże możliwe jest określenie zbieżności przy pomocy odpowiednich kryteriów, które bazują jedynie na wyrazach szeregów. W dalszej części przedstawimy pięć takich testów, które można wykorzystać do badania zbieżności szeregów nieskończonych o wyrazach dodatnich.

Theorem (Kryterium porównawcze)

Załóżmy, że $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *i* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *są szeregami o wyrazach dodatnich.*

1. *Jeżeli* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$ *i* $a_k \leq b_k$ *dla każdego indeksu naturalnego* k*, to* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$.
2. *jeżeli* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$ *i* $a_k \leq b_k$ *dla każdego indeksu naturalnego* k*, to* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$.

Przykład.

Sprawdź zbieżność szeregu: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+1}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$\frac{1}{k} = \frac{k+1}{k(k+1)} = \frac{k+1}{k^2+k} \leq \frac{k+1}{k^2+1}.$$

Wiemy, że $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$, zatem korzystając z kryterium porównawczego stwierdzamy, że $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+1} = \infty$.

Theorem (Kryterium ilorazowe)

Załóżmy, że $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *i* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *są szeregami o wyrazach dodatnich oraz że*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

1. *Jeżeli L jest dodatnią stałą, to oba szeregi są równocześnie albo zbieżne, albo rozbieżne.*
2. *Jeżeli* $L = 0$ *i* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$, *to* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k < 0$.
3. *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ *i* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$, *to* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$.

Przykład.

Sprawdź zbieżność szeregu: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k-1}{3^k-1}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że jeżeli przyjmiemy $b_k = (\frac{2}{3})^k$, to $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{2}{3})^n \left(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{3^n}}\right)}{(\frac{2}{3})^n} = 1 = L.$$

Korzystając z kryterium ilorazowego stwierdzamy, że $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k-1}{3^k-1} < \infty$.

Theorem (Kryterium d'Alemberta)

Załóżmy, że $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest szeregiem o wyrazach dodatnich takim, że*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

1. *Jeżeli* $L < 1$*, to szereg jest zbieżny.*
2. *Jeżeli* $L > 1$*, albo* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$*, to szereg jest rozbieżny.*
3. *Jeżeli* $L = 1$*, to kryterium nie rozstrzyga.*

Przykład.

Sprawdź zbieżność szeregu: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{3^k \cdot k!}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}\cdot(n+1)!} \cdot \frac{3^n \cdot n!}{n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{3(n+1)n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{3}e < 1.$$

Korzystając z kryterium d'Alemberta stwierdzamy, że szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{3^k \cdot k!}$ jest zbieżny.

Theorem (Kryterium pierwiastkowe Cauchy'ego)

Załóżmy, że $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest szeregiem o wyrazach dodatnich takim, że*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

1. *Jeżeli* $L < 1$*, to szereg jest zbieżny.*
2. *Jeżeli* $L > 1$*, to szereg jest rozbieżny.*
3. *Jeżeli* $L = 1$*, to kryterium nie rozstrzyga.*

Przykład.

Sprawdź zbieżność szeregu: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3^k \cdot k^{k^2}}{(k+1)^{k^2}}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n \cdot n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{e} > 1.$$

Korzystając z kryterium pierwiastkowego Cauchy'ego stwierdzamy, że szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3^k \cdot k^{k^2}}{(k+1)^{k^2}}$ jest rozbieżny.

Theorem (Kryterium całkowe Cauchy'ego)

Załóżmy, że funkcja f jest funkcją ciągłą, nieujemną i malejącą dla $x \geq 1$ taką, że $f(k) = a_k$ dla $k \geq 1$. Jeżeli $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ jest zbieżna, to szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ również jest zbieżny. Jeżeli całka $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ jest rozbieżna, to szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ jest rozbieżny.

Przykład.

Sprawdź zbieżność szeregu: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+x}dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)}dx = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \lim_{s\to\infty} \left(\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)_1^s = \lim_{s\to\infty} \left(\ln\left(\frac{s}{s+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \ln(2).$$

Korzystając z kryterium całkowego Cauchy'ego stwierdzamy, że szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$ jest zbieżny.