Liczby zespolone

Dr Alina Gleska

Instytut Matematyki, Wydział Elektryczny,
Politechnika Poznańska

Liczbami zespolonymi nazywamy wyrażenia postaci:

$$z = a + bi, \quad \text{gdzie} \quad i^2 = -1.$$

Zbiór liczb zespolonych oznaczamy przez $\mathbb{C}$. Współczynniki rzeczywiste a i b nazywamy odpowiednio częścią rzeczywistą i częścią urojoną liczby z oraz oznaczamy przez $Re(z)$ i $Im(Z)$. Symbol i nazywamy jednostką urojoną i w praktyce zapisujemy jako $i = \sqrt{-1}$. Liczbę zespoloną

$$\overline{z} = a - bi$$

nazywamy liczbą sprzężoną do z. Geometrycznie, liczba $\overline{z} = (a, -b)$ jest punktem symetrycznym do punktu $z = (a, b)$ względem osi rzeczywistej $Re(z)$. Liczbę

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

nazywamy modułem liczby $z = a + bi$. Ilustracja graficzna.

- Aby dodać dwie liczby zespolone, sumujemy oddzielnie części rzeczywiste i części urojone składników:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

- Podobnie definiujemy odejmowanie:

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

- Mnożenie dwóch liczb zespolonych wykonujemy zgodnie ze wzorem:

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(bc+ad)i.$$

- Dzielenie dwóch liczb zespolonych wykonujemy zgodnie z następującym wzorem:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd-(ad-bc)i}{c^2+d^2}.$$

- Odwrotność niezerowej liczby zespolonej $z = a+bi$ wyznaczamy następująco:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

- Pierwiastkami kwadratowymi z liczby $z = a + bi$ (dla $b \neq 0$) są $\pm(\gamma + \delta i)$, gdzie

$$\gamma = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \quad \text{oraz} \quad \delta = sgn(b)\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

Przykład.
Obliczmy $\sqrt{3 - 4i}$. W tym przypadku

$$a = 3, \quad b = -4, \quad sgn(b) = (-1),$$

zatem

$$\gamma = \sqrt{\frac{3 + 5}{2}} = 2, \quad \delta = (-1)\sqrt{\frac{-3 + 5}{2}} = -1$$

i pierwiastkami kwadratowymi są wartości:

$$2 - i \quad \text{oraz} \quad -(2 - i) = -2 + i.$$

Inny sposób wyznaczania pierwiastków kwadratowych

Załóżmy, że chcemy obliczyć

$$\sqrt{3-4i} = a + bi.$$

Zauważmy, że $a \neq 0$ i $b \neq 0$ oraz

$$3-4i = a^2 + 2abi + b^2 i^2 = a^2 - b^2 + 2abi.$$

Wiemy, że dwie liczby zespolone są sobie równe, jeżeli ich części rzeczywiste i części urojone są równe. Mamy zatem dwa równania:

$$a^2 - b^2 = 3 \quad \text{i} \quad 2ab = -4.$$

Z drugiego równania dostajemy:

$$a = \frac{-4}{2b} = \frac{-2}{b}.$$

Wstawiając powyższy warunek do pierwszego równania mamy:

$$(\frac{-2}{b})^2 - b^2 = 3 \Leftrightarrow \frac{4}{b^2} - b^2 = 3.$$

Przemnóżmy obie strony przez b^2:

$$4 - b^4 = 3b^2.$$

Zatem

$$b^4 + 3b^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (b^2 + 4)(b^2 - 1) = 0.$$

b jest liczbą rzeczywistą, zatem mamy dwie możliwości: $b_1 = 1$ i $b_2 = -1$. Ale $a = \frac{-2}{b}$, zatem ostatecznie: $a_1 = -2$ i $a_2 = 2$. Pierwiastkami kwadratowymi z liczby $(3 - 4i)$ są: $(-2 + i)$ oraz $(2 - i)$.

Przykład.
W dziedzinie zespolonej rozwiązać następujące równania kwadratowe:

- $z^2 + 4z + 13 = 0,$
- $z^2 - (3-2i)z + (17+i) = 0.$

Do tej chwili rozważaliśmy liczby zespolone w postaci algebraicznej, jednakże operacje ich mnożenia, dzielenia czy obliczania potęg są o wiele prostsze jeżeli liczby te zapiszemy w postaci trygonometrycznej.

Postać trygonometryczna

Alternatywnym sposobem określenia położenia punktu P na płaszczyźnie zespolonej (oprócz podania współrzędnych x i y czy też a i b) jest wskazanie odległości tego punktu od środka układu współrzędnych $O(0,0)$ razem z kątem odchylenia od osi rzeczywistej $Re(z)$ (kąt mierzymy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara). Interpretacja graficzna.

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{|z|}, \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{|z|},$$

gdzie $|z|$ jest modułem liczby z, a φ nazywamy argumentem liczby z (czasami nazywanym też fazą). Zatem

$$z = a + bi = |z|\cos(\varphi) + |z|i\sin(\varphi) = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)).$$

Jak znaleźć φ? Najprościej - korzystając z wykresu funkcji sinus i cosinus. Zazwyczaj główny argument pochodzi z przedziału $[-\pi, \pi]$. Wartości z przedziału $[0, 2\pi]$ uzyskamy dodając 2π jeżeli kąt był ujemny. Wartość kąta φ podajemy w radianach.

Mnożenie i dzielenie liczb w postaci trygonometrycznej

Mając dwie liczby zespolone $z_1 = |z_1|(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))$ oraz $z_2 = |z_2|(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$ znajdziemy ich iloczyn:

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)) \\
&= |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1) i\sin(\varphi_2) + \\
&\quad + i\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + i^2\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)) \\
&= |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \\
&\quad + i(\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2))) \\
&= |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).
\end{aligned}
$$

Uogólniając powyższą metodę otrzymujemy wzór De Moivre'a:

$$z^n = (|z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)))^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)),$$

gdzie n jest liczbą całkowitą (może być również liczbą ujemną).

Jeżeli chcemy podzielić dwie liczby zespolone $z_1 = |z_1|(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))$ oraz $z_2 = |z_2|(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$, to mamy:

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= z_1 \cdot (z_2)^{-1} \\
&= |z_1| \cdot |z_2|^{-1}(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)) \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))(\cos(\varphi_2) - i\sin(\varphi_2)) \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \\
&\quad + i(\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2))) \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).
\end{aligned}
$$

Definicja.
Pierwiastkami n-tego stopnia z liczby z nazywamy liczby określone wzorami:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

dla dowolnego $0 \leq k \leq n-1$. Liczba $\sqrt[n]{|z|}$ oznacza zwykły (dodatni) pierwiastek n-tego stopnia z modułu liczby z ($|z|$).

Przykład.

Oblicz wyrażenia:

1. $(1-i)^{124}$,
2. $(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{-1}$,
3. $\sqrt[3]{-8}$,
4. rozwiąż równanie: $w^4 = -8+8\sqrt{3}i$.