Ciągi

Dr Alina Gleska

Instytut Matematyki, Wydział Elektryczny,
Politechnika Poznańska

Definicja

Ciągiem nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych.
Mamy zatem elementy: $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$, ... Zgodnie z tradycją, zamiast używać notacji funkcyjnej $f(n)$, ciągi będziemy oznaczali symbolem (a_n). Wyrazy ciągu (czyli wartości funkcji) otrzymamy nadając n po kolei wartości $1, 2, 3, \ldots$ w wyrazie ogólnym a_n. Zatem (a_n) jest równoważny zapisowi $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

Sposoby definiowania ciągów:

- przez podanie wzoru wyrazu ogólnego, np. $a_n = 3^n$;
- rekurencyjnie - kolejne elementy zależą od poprzednich wartości ciągu; przykłady:
  - ciąg arytmetyczny (o stałej różnicy między wyrazami) - $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n - 1$;
  - ciąg geometryczny (o stałym ilorazie sąsiednich wyrazów) - $b_1 = 5,\ b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n$;
  - ciąg Fibonacciego - $F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$;
- przez wypisanie wyrazów ciągu, np. $(1, 3, 9, 27, \ldots)$;
- opisowo, np. a_n - n-ta liczba pierwsza.

Definicja.
Ciąg (a_n) nazywamy monotonicznym, jeżeli jest

- rosnący: $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$, lub
- malejący: $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} < \ldots$, lub
- niemalejący: $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots$, lub
- nierosnący: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \ldots$.

Przykład.
Oceń monotoniczność ciągów: $a_n = \frac{1}{n}$ i $b_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

Definicja Ciąg (a_n) nazywamy ograniczonym, jeżeli istnieje dodatnia liczba B taka, że $|a_n| \leq B$ dla każdego n.

Przykład.
Ciąg $(\frac{2n+1}{n+1})$ jest ograniczony z góry przez 2, ponieważ

$$\frac{2n+1}{n+1} \leq \frac{2n+2}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} = 2.$$

Ponadto $\frac{2n+1}{n+1} \geq 0$ oznacza, że ciąg jest ograniczony z dołu przez 0. Zauważmy, że tak naprawdę to ciąg ten jest ograniczony z dołu przez pierwszy wyraz tego ciągu. Zatem $0 \leq \frac{2n+1}{n+1} \leq 2$ dla każdego n, co implikuje, że ciąg jest ograniczony (mamy bowiem nierówność $-2 < 0 \leq \frac{2n+1}{n+1} \leq 2$, która pozwala nam zapisać: $|\frac{2n+1}{n+1}| \leq 2$ dla każdego n).

Definicja Ciąg (a_n) nazywamy zbieżnym do liczby L, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N taka, że

$$(*) \qquad |a_n - L| < \varepsilon \quad \text{dla wszystkich} \quad n > N.$$

Zatem jeśli (a_n) jest ciągiem zbieżnym, to warunek (*) oznacza, że w dowolnie małym otoczeniu liczby L znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n). Zbieżność oznaczamy następująco:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Wykresy. Jak można zauważyć, jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny, to wszystkie wyrazy z wyjątkiem skończonej ich liczby leżą w przedziale $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Uwaga.
Kiedy $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, to mówimy, że ciąg jest rozbieżny. Trzeci przypadek zachodzi wtedy, kiedy granica $\lim_{n\to\infty} a_n$ nie istnieje - wtedy mówimy, że ciąg nie ma granicy (jak w przypadku ciągu $b_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$). W literaturze anglojęzycznej ten trzeci przypadek jest również nazywany rozbieżnym.

Theorem (Twierdzenie Weierstrassa)

Każdy ciąg ograniczony i monotoniczny jest zbieżny.

Uwaga.

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony. Niestety, ciąg ograniczony nie musi być zbieżny - np. ciąg $(-1)^n + \frac{1}{n}$ jest ograniczony przez $3/2$, ale nie ma granicy.

Theorem

Niech (a_n) i (b_n) będą ciągami zbieżnymi. Jeżeli istnieją granice $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$, to

1. $\lim\limits_{n\to\infty} k \cdot a_n = k \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = k \cdot L_1$, *gdzie k - stała;*
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_1 + L_2$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_1 \cdot L_2$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{L_1}{L_2}$, $L_2 \neq 0$.

Innymi słowy, jeżeli granice ciągów istnieją i są skończone, to

- granica sumy jest równa sumie granic;
- granica iloczynu jest równa iloczynowi granic, oraz
- granica ilorazu jest równa ilorazowi tych granic, pod warunkiem, że granica mianownika jest różna od 0.

Następne dwa twierdzenia wydają się raczej oczywiste.

Theorem

1. *Dla* $|r| < 1$ *ciąg* (r^n) *dąży do 0.*
2. *Dla* $r > 1$ *ciąg* (r^n) *jest rozbieżny.*
3. *Dla* $r < -1$ *ciąg* (r^n) *nie ma granicy (wyrazy oscylują).*

Theorem

Dla dowolnej dodatniej liczby wymiernej r*, ciąg* $(\frac{1}{n^r})$ *zbiega do zera.*

Theorem (Twierdzenie o trzech ciągach)

Jeżeli (a_n), (b_n) *i* (c_n) *są ciągami, dla których zachodzą nierówności:*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \textit{dla każdego} \quad n$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L,$$

to

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L.$$

Theorem

1. *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *lub* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, *to* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.
2.
   - *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *oraz* $a_n > 0$, *to* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$.
   - *Jeśli* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *oraz* $a_n < 0$, *to* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$.

Najważniejsze granice:

- stała Eulera $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$;
- $e^k = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n$;
- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$ dla $a > 0$;
- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

Przykłady. Wyznacz granice:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+n+1}{n^3+2}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{1-3n^3}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-\sqrt{n+2}}{n+3}$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{2}n)$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{2n^2}$;
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n+7^n}$.