Funkcje

Dr Alina Gleska

Instytut Matematyki, Wydział Elektryczny,
Politechnika Poznańska

Definicja

Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y nazywamy relację, która każdemu elementowi $x \in X$ przyporządkowuje dokładnie jeden element $y \in Y$. Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji f. Zbiór odpowiadających mu elementów $y \in Y$ nazywamy zbiorem wartości funkcji f.

Definicja

Niech f będzie funkcją. Liczbę y odpowiadającą wybranej liczbie x z dziedziny funkcji nazywamy wartością funkcji f w punkcie x i zapisujemy jako $y = f(x)$. Ponieważ wartości y zależą od wyboru x, nazywamy tę zmienną zmienną zależną; z kolei x nazywamy zmienną niezależną.

Zauważmy, że dziedziną funkcji f jest największy podzbiór zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, dla którego funkcja ta ma sens (nazywany również naturalną dziedziną).

Definicja

Wykresem funkcji f nazywamy zbiór punktów $\{(x, y) : y = f(x), x \in D_f\}$ umieszczonych w kartezjańskim układzie współrzędnych. Zauważmy, że dowolna krzywa jest wykresem funkcji tylko wtedy, gdy posiada dokładnie jeden punkt przecięcia z linią prostą, prostopadłą do osi OX.

Przesunięcia wykresów: jeśli c jest stałą, wykresy sumy $f(x)+c$, różnicy $f(x)-c$ oraz złożenia $f(x+c)$ i $f(x-c)$ można otrzymać przez przesunięcie wyjściowego wykresu funkcji f. Poniższa tabela przedstawia wyniki dla $c>0$.

Funkcja	*Wykres*
$y=f(x)+c$	Wykres $y=f(x)$ przesunięty do góry o c jednostek
$y=f(x)-c$	Wykres $y=f(x)$ przesunięty w dół o c jednostek
$y=f(x+c)$	Wykres $y=f(x)$ przesunięty na lewo o c jednostek
$y=f(x-c)$	Wykres $y=f(x)$ przesunięty na prawo o c jednostek

Przykład. Narysować wykresy funkcji: $y=x^2+1$, $y=x^2-1$, $y=(x+1)^2$, $y=(x-1)^2$.

Sumę $f+g$, różnicę $f-g$, iloczyn fg oraz iloraz f/g dwóch funkcji można zdefiniować w poniższy sposób.

Definicja Niech f i g oznaczają funkcje. Definiujemy

- sumę: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
- różnicę: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$;
- iloczyn: $(fg)(x) = f(x)g(x)$;
- iloraz: $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Dziedziną funkcji $f+g$, $f-g$ oraz fg jest część wspólna dziedziny funkcji f i dziedziny funkcji g. Dziedziną ilorazu f/g jest część wspólna dziedziny funkcji f i dziedziny funkcji g z wyłączeniem punktów x, dla których $g(x) = 0$.

Definicja

Niech f i g oznaczają funkcje.

- Złożeniem fukcji f i g, oznaczanym przez $f \circ g$, nazywamy funkcję
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$
- Złożeniem funkcji g i f, oznaczanym przez $g \circ f$, nazywamy funkcję
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

W ogólności, $f \circ g \neq g \circ f$.

Przykład.

Dla $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^2 + 1$ wyznaczyć $f \circ g$ oraz $g \circ f$.

Rozwiązanie.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = (x^2)^2 + 1 = x^4 + 1.$$

Funkcje złożone takie jak $f \circ g$ czasami nazywane są "funkcjami funkcji". Oczywiście liczby wyznaczone przez $g(x)$ muszą należeć do dziedziny funkcji f. Innymi słowy, dziedzina funkcji $f \circ g$ jest tym podzbiorem dziedziny funkcji g, dla którego $g(x)$ należy do dziedziny funkcji f.

Przykład.

Dla funkcji $f(x) = 3x - \sqrt{x}$ i $g(x) = 2x + 1$ wyznaczyć dziedzinę $f \circ g$.

Rozwiązanie.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) =$$

$$= 3(2x+1) - \sqrt{2x+1} = 6x + 3 - \sqrt{2x+1}.$$

Aby $f \circ g$ było zdefiniowane, musi być spełniony warunek: $2x + 1 \geq 0$; to oznacza, że dziedziną $f \circ g$ jest przedział $[-\frac{1}{2}, \infty)$.

Przykład.

Wyrazić $F(x)=\sqrt{2x^2+5}$ jako złożenie $f\circ g$ dwóch funkcji f i g.
Rozwiązanie. Jeżeli przyjmiemy $f(x)=\sqrt{x}$ oraz $g(x)=2x^2+5$, to dostaniemy rozwiązanie:

$$F(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x^2+5)=\sqrt{2x^2+5}.$$

Inne rozwiązanie. Jeżeli przyjmiemy $f(x)=\sqrt{2x+5}$ oraz $g(x)=x^2$, to również otrzymamy funkcję F:

$$F(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=\sqrt{2x^2+5}.$$

Definicja

Miejsce zerowe funkcji: punkty przecięcia wykresu funkcji $y = f(x)$ z osią x są rzeczywistymi rozwiązaniami równania $f(x) = 0$. Punkty te nazywamy miejscami zerowymi (lub zerami) funkcji f. Jeżeli natomiast wykres funkcji $y = f(x)$ przecina oś y, to punkt przecięcia ma wartość $f(0)$.

Definicja

Symetria: funkcje mogą wykazywać trzy różne typy symetrii. Funkcję, której wykres jest symetryczny względem osi y nazywamy funkcją parzystą (przykładem takiej funkcji jest $f(x) = x^2$). Funkcję, której wykres jest symetryczny względem środka układu współrzędnych nazywamy funkcją nieparzystą (tutaj przykładem jest funkcja $f(x) = x^3$). Wykresy funkcji mogą być również symetryczne względem prostej $y = x$ (w przypadku funkcji wzajemnie odwrotnych).
Pytanie: Dlaczego wykres funkcji nie może być symetryczny względem osi x?

Definicja

Symetria: funkcje mogą wykazywać trzy różne typy symetrii. Funkcję, której wykres jest symetryczny względem osi y nazywamy funkcją parzystą (przykładem takiej funkcji jest $f(x) = x^2$). Funkcję, której wykres jest symetryczny względem środka układu współrzędnych nazywamy funkcją nieparzystą (tutaj przykładem jest funkcja $f(x) = x^3$). Wykresy funkcji mogą być również symetryczne względem prostej $y = x$ (w przypadku funkcji wzajemnie odwrotnych).

Pytanie: Dlaczego wykres funkcji nie może być symetryczny względem osi x? Odpowiedź. To nie jest funkcja.

Testy symetryczności

- Wykres funkcji $y = f(x)$ jest symetryczny względem osi y, jeżeli
$$f(-x) = f(x).$$
- Wykres funkcji $y = f(x)$ jest symetryczny względem środka układu współrzędnych, jeżeli
$$f(-x) = -f(x).$$

Monotoniczność funkcji:

- funkcję f nazywamy rosnącą na przedziale I, jeśli $f(x_1) < f(x_2)$ dla dowolnego x_1 i x_2 z przedziału I spełniającego warunek $x_1 < x_2$,
- funkcję f nazywamy malejącą na przedziale I, jeśli $f(x_1) > f(x_2)$ dla dowolnego x_1 i x_2 z przedziału I spełniającego warunek $x_1 < x_2$,
- funkcję f nazywamy nierosnącą na przedziale I, jeśli $f(x_1) \geq f(x_2)$ dla dowolnego x_1 i x_2 z przedziału I spełniającego warunek $x_1 < x_2$,
- funkcję f nazywamy niemalejącą na przedziale I, jeśli $f(x_1) \leq f(x_2)$ dla dowolnego x_1 i x_2 z przedziału I spełniającego warunek $x_1 < x_2$.

Funkcja różnowartościowa – funkcja, która różnym argumentom przypisuje różne wartości; zatem

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

lub równoważnie:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Funkcja wielomianowa (w skrócie: wielomian)

Jeżeli $a_n \neq 0$, to funkcję

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

gdzie n - nieujemna liczba całkowita, nazywamy wielomianem stopnia n. Współczynniki a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ są liczbami rzeczywistymi. Dziedziną dowolnego wielomianu jest zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych, natomiast zbiór wartości zależy od stopnia n wielomianu oraz znaku współczynnika a_n. Wielomiany stopnia 0, 1 i 2, to odpowiednio:

- $f(x) = a_0$ - funkcja stała,
- $f(x) = a_1 x + a_0$, $a_1 \neq 0$ - funkcja liniowa,
- $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_2 \neq 0$ - funkcja kwadratowa.

Wykresy:

- wykresem funkcji stałej jest prosta równoległa do osi x;
- wykresem funkcji liniowej jest prosta;
- wykresem funkcji kwadratowej jest parabola.

Funkcja wymierna

Funkcję postaci: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie P i Q są wielomianami nazywamy funkcją wymierną. Dziedziną funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych, z którego usunięto te liczby, dla których $Q(x) = 0$.

Funkcja potęgowa

Funkcję postaci: $f(x) = x^{\alpha}$, gdzie α - liczba rzeczywista dodatnia nazywamy funkcją potęgową. Dziedzina takiej funkcji zależy od wartości potęgi α.

Przykłady:

Funkcja wykładnicza

Funkcję postaci: $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$, nazywamy funkcją wykładniczą o podstawie a. Własności:

- dziedziną funkcji $f(x) = a^x$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, a zbiorem wartości – zbiór wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych;
- pozostałe własności zależą od tego czy $a > 1$, czy $a < 1$.
  - Dla $a > 1$ funkcja $f(x) = a^x$ jest funkcją rosnącą ze względu na x.
  - Dla $0 < a < 1$ funkcja $f(x) = a^x$ jest funkcją malejącą ze względu na x.

Najważniejszą funkcją wykładniczą jest funkcja $f(x) = e^x$, gdzie e oznacza stałą Eulera.

Funkcja logarytmiczna

Definicja

Dla $a, b > 0$, $a \neq 1$:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

Liczbę x nazywamy logarytmem z liczby b przy podstawie a.

Definicja

Logarytmy przy podstawie e nazywamy logarytmami naturalnymi i oznaczamy w skrócie:

$$\log_e b = \ln b.$$

Wykres.

Własności logarytmów wynikają bezpośrednio z własności wykładników. Dla dowolnej podstawy $a > 0$, $a \neq 1$

1. $\log_a 1 = 0$, ponieważ $a^0 = 1$;
2. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ dla $x, y > 0$;
3. $\log_a x/y = \log_a x - \log_a y$ dla $x, y > 0$;
4. $\log_a x^m = m \cdot \log_a x$ dla dowolnej liczby rzeczywistej m i $x > 0$;
5. wzór na przekształcanie logarytmów: $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$;
6. $e^{\ln a} = a$ dla $a > 0$, $\ln e^a = a$ dla dowolnego $a \Rightarrow$ funkcja wykładnicza $f(x) = e^x$ i funkcja logarytmiczna $g(x) = \ln x$ są funkcjami wzajemnie odwrotnymi (ich wykresy są symetryczne względem prostej $y = x$);
7. $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$.

Funkcje trygonometryczne

Przypomnijmy, że w trygonometrii funkcje cosinus oraz sinus kąta t, oznaczane przez $\cos(t)$ i $\sin(t)$, odpowiednio, mogą być rozumiane na dwa sposoby:

1. jako iloraz długości odpowiednich boków trójkąta (Rysunek 1)

$$\cos(t) = \frac{\text{przyprostokątna przyległa do kąta}}{\text{przeciwprostokątna}},$$
$$\sin(t) = \frac{\text{przyprostokątna naprzeciw kąta}}{\text{przeciwprostokątna}};$$

2. jako współrzędne x i y na kole jednostkowym (Rysunek 2).

Miary kątów: dowolny kąt może być mierzony albo w stopniach, albo w radianach. Jeden radian (liczbowo) odpowiada mierze kąta, przy którym długość łuku na kole jednostkowym jest również równa 1. Połowie okręgu jednostkowego odpowiada π radianów.

$$\pi \ (rad) = 180^\circ \Rightarrow 1 \ \ radian = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) \cong 57.296^\circ$$

Stopnie	0°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	270°	360°
Radiany	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Terminologia: kąty mierzone w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara mają miary dodatnie, podczas gdy kąty mierzone zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara są ujemne.

Dodatkowe funkcje trygonometryczne

- tangens: $\mathrm{tg}(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$, cotangens: $\mathrm{ctg}(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} = \frac{1}{\mathrm{tg}(t)}$
- secans: $\sec(t) = \frac{1}{\cos(t)}$, cosecans: $\csc(t) = \frac{1}{\sin(t)}$.

Uwaga.

Funkcje $\sin(t)$ i $\cos(t)$ są nazywane okresowymi o okresie 2π, podczas gdy $\mathrm{tg}(t)$ i $\mathrm{ctg}(t)$ są funkcjami okresowymi o okresie π.

Funkcja $\sin(t)$ jest funkcją nieparzystą, czyli $\sin(-t) = -\sin(t)$; funkcja $\cos(t)$ jest funkcją parzystą ($\cos(-t) = \cos(t)$).

Przydatne wzory

Podstawowe tożsamości:

$$\sin^2(t)+\cos^2(t)=1, \quad \operatorname{tg}(t)\operatorname{ctg}(t)=1,$$
$$1+\operatorname{tg}^2(t)=\sec^2(t), \quad 1+\operatorname{ctg}^2(t)=\csc^2(t).$$

Funkcje podwojonego kąta:

$$\sin(2t)=2\sin(t)\cos(t), \quad \cos(2t)=\cos^2(t)-\sin^2(t).$$

Funkcje połowy kąta:

$$\sin^2(\tfrac{t}{2})=\tfrac{1}{2}(1-\cos(t)), \quad \sin^2(t)=\tfrac{1}{2}(1-\cos(2t))$$
$$\cos^2(\tfrac{t}{2})=\tfrac{1}{2}(1+\cos(t)), \quad \cos^2(t)=\tfrac{1}{2}(1+\cos(2t))$$

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów:

$$\begin{aligned}
\sin(t_1+t_2) &= \sin(t_1)\cos(t_2)+\cos(t_1)\sin(t_2)\\
\cos(t_1+t_2) &= \cos(t_1)\cos(t_2)-\sin(t_1)\sin(t_2)\\
\sin(t_1-t_2) &= \sin(t_1)\cos(t_2)-\cos(t_1)\sin(t_2)\\
\cos(t_1-t_2) &= \cos(t_1)\cos(t_2)+\sin(t_1)\sin(t_2)
\end{aligned}$$

Inne wzory:

$$\begin{aligned}
\sin(t_1)+\sin(t_2) &= 2\sin\left(\tfrac{t_1+t_2}{2}\right)\cos\left(\tfrac{t_1-t_2}{2}\right)\\
\sin(t_1)-\sin(t_2) &= 2\cos\left(\tfrac{t_1+t_2}{2}\right)\sin\left(\tfrac{t_1-t_2}{2}\right)\\
\cos(t_1)+\cos(t_2) &= 2\cos\left(\tfrac{t_1+t_2}{2}\right)\cos\left(\tfrac{t_1-t_2}{2}\right)\\
\cos(t_1)-\cos(t_2) &= -2\sin\left(\tfrac{t_1+t_2}{2}\right)\sin\left(\tfrac{t_1-t_2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Wykresy funkcji trygonometrycznych:

Funkcje cyklometryczne (odwrotne do funkcji trygonometrycznych)

Funkcją odwrotną do funkcji sinus ("arcus sinus x"), oznaczaną jako $\arcsin(x)$ nazywamy funkcję zdefiniowaną związkiem:

$$y = \arcsin(x) \Leftrightarrow x = \sin(y),$$

gdzie $-1 \leq x \leq 1$ i $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Innymi słowy, arcus sinus jakiejś liczby to kąt (w radianach), dla którego sinus jest równy x.

Wykres:

Funkcją odwrotną do funkcji cosinus ("arc cosine of x"), oznaczaną jako arccos(x) nazywamy funkcję zdefiniowaną związkiem:

$$y = \arccos(x) \Leftrightarrow x = \cos(y),$$

gdzie $-1 \leq x \leq 1$ i $0 \leq y \leq \pi$. Innymi słowy, arcus cosinus jakiejś liczby to kąt (w radianach), dla którego cosinus jest równy x.
Wykres:

Funkcją odwrotną do funkcji tangens (”arcus tangens x”), oznaczaną jako arctg(x) nazywamy funkcję zdefiniowaną związkiem:

$$y = \operatorname{arctg}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{tg}(y),$$

gdzie $-\infty < x < \infty$ i $-\pi/2 < y < \pi/2$. Innymi słowy, arcus tangens jakiejś liczby to kąt (w radianach), dla którego tangens jest równy x.
Wykres:

Funkcją odwrotną do funkcji cotangens ("arcus cotangens x"), oznaczaną jako arcctg(x) nazywamy funkcję zdefiniowaną związkiem:

$$y = \operatorname{arcctg}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg}(y),$$

gdzie $-\infty < x < \infty$ i $0 < y < \pi$. Innymi słowy, arcus cotangens jakiejś liczby to kąt (w radianach), dla którego cotangens jest równy x.
Wykres:

Własności:

$$\begin{aligned}\arcsin(x) &= -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x), \quad x \in (-1,1) \\ \mathrm{arctg}(x) &= -\mathrm{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arcctg}(x), \quad x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Funkcje hiperboliczne

Mamy sześć funkcji hiperbolicznych: sinus hiperboliczny, cosinus hiperboliczny, tangens hiperboliczny, cotangens hiperboliczny, secans hiperboliczny i cosecans hiperboliczny. Oto ich definicje:

$$
\begin{array}{ll}
\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
\mathrm{tgh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, & \mathrm{ctgh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \\
\mathrm{sech}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, & \mathrm{csch}(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}
\end{array}
$$

Wykresy i własności:

Przydatne formuły

Podstawowe związki:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \quad \operatorname{tgh}(x)\operatorname{ctgh}(x) = 1,$$
$$1 - \operatorname{tgh}^2(x) = \operatorname{sech}^2(x), \quad 1 + \operatorname{csch}^2(x) = \operatorname{ctgh}^2(x).$$

Wzory dla podwojonego kąta:

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x), \quad \cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x).$$

Dodatkowe wzory:

$$\begin{aligned}\sinh(x \pm y) &= \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y)\\ \cosh(x \pm y) &= \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)\end{aligned}$$