Granice funkcji

Dr Alina Gleska

Instytut Matematyki, Wydział Elektryczny,
Politechnika Poznańska

Definicja intuicyjna

Jeśli $f(x)$ może być dowolnie blisko skończonej liczby L dla x dowolnie bliskich, ale różnych od x_0, zarówno z lewej, jak i z prawej strony x_0, to

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$x \to x_0^-$$

oznacza, że x dąży do x_0 z lewej strony, zaś

$$x \to x_0^+$$

oznacza, że x dąży do x_0 z prawej strony.

Zatem jeśli granice jednostronne: $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ oraz $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ mają wspólną wartość L,

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

to mówimy, że: granica $\lim_{x \to x_0} f(x)$ istnieje i zapisujemy to jako $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

Formalne definicje.

Twierdzenie

- Jeśli granica $\lim_{x \to x_0} f(x)$ istnieje, to jest jedyna.
- Jeśli c jest dowolną stałą, to $\lim_{x \to x_0} c = c$.
- $\lim_{x \to x_0} x = x_0$.
- Jeśli c jest dowolną stałą, to $\lim_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Twierdzenie o granicach właściwych

Niech $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2$. Wtedy

$$\lim_{x\to x_0}\Big(f(x)+g(x)\Big) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = L_1 + L_2;$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = L_1\cdot L_2,$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2\neq 0,$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n = L_1^n.$$

Twierdzenie

Niech $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ oraz niech n będzie dodatnią liczbą naturalną. Jeśli $L > 0$ dla n dodatnich liczb naturalnych bądź jeśli $L \neq 0$ przy n naturalnych nieparzystych, to

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{1/n} = L^{1/n}.$$

Twierdzenie

Jeśli $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 \neq 0$ oraz $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, to $\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x)$ nie istnieje (a dokładniej jest równa $\pm\infty$).

Twierdzenie o trzech funkcjach

Jeśli f, g oraz h są funkcjami, dla których $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ dla wszystkich x z otwartego przedziału zawierającego x_0 oraz jeśli

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L,$$

to

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Trzy bardzo przydatne granice:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1;$
2. $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1, \quad a > 0;$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a).$

Przykład

Wyznaczyć granice:

1. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{125-x^3}{x-5}$;
2. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$;
3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{4-\sqrt{x+15}}{x^2-1}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}(5x)}{\sin(7x)}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$;
6. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\sin(\frac{1}{x})$.

Każdą granicę typu:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$$

nazywamy granicą nieskończoną lub niewłaściwą. Jeśli zachodzi któryś z powyższych warunków, to prostą $x = a$ nazywamy asymptotą pionową wykresu funkcji f.

Twierdzenie

- Jeśli n jest parzystą liczbą naturalną, to $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{(x-x_0)^n} = \infty$.
- Jeśli n jest nieparzystą liczbą naturalną, to $\lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{1}{(x-x_0)^n} = -\infty$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{1}{(x-x_0)^n} = +\infty$.

Uwaga

Przypuśćmy, że $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie P i Q są wielomianami. Jeśli $Q(x_0) = 0$ i $P(x_0) \neq 0$, to prosta $x = x_0$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji f.

Funkcja f może osiągać stałą wartość L, kiedy zmienna niezależna x nieograniczenie rośnie lub maleje. Wtedy piszemy

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \text{ lub } \lim_{x \to -\infty} f(x) = L,$$

aby oznaczyć granicę w nieskończoności.

Jeśli $f(x) \to L$ przy $x \to +\infty$ lub $x \to -\infty$, to mówimy, że prosta $y = L$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f.

Twierdzenie

Niech t będzie dodatnią liczbą wymierną (dodatnim ułamkiem zwykłym). Jeśli x^t jest zdefiniowane, to

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^t}=0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^t}=0.$$

Przykład

Wyznaczyć granice:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{3x+1}\right)\left(\frac{4x^2+1}{2x^2+x}\right)^3$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5x^2+6x+3}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+1})$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)$.

Asymptoty ukośne

Przykład

Narysuj szkic wykresu funkcji: $f(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2-9}$.