Ciągłość

Dr Alina Gleska

Instytut Matematyki, Wydział Elektryczny,
Politechnika Poznańska

Intuicyjnie, **funkcję ciągłą** można opisać jako tę, której wykres można narysować bez odrywania ołówka od kartki.

Zanim sfomułujemy ścisłą definicję ciągłości narysujemy kilka wykresów funkcji, które są niecią̨głe w pewnym punkcie x_0.

Wykresy.

Definicja

Funkcję f nazywamy **ciągłą** w punkcie $x_0 \in D_f$, jeżeli

- $f(x_0)$ jest zdefiniowane,
- istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Przykład

Funkcja $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x + 1$, $x \neq 1$, jest nieciągła w 1, ponieważ $f(1)$ jest niezdefiniowane. Jednakże f jest ciągła w dowolnym $x \neq 1$.

Definicja

Funkcję f nazywamy **ciągłą na przedziale otwartym (a,b)**, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.

Definicja

Funkcję f nazywamy **ciągłą na przedziale domkniętym [a,b]**, jeżeli jest ciągła na przedziale otwartym (a, b) oraz dodatkowo

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{i} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

Pojęcie ciągłości można w podobny sposób rozszerzyć na przedziały takie jak (a, ∞), $(-\infty, b)$, $(-\infty, \infty)$, $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, b]$ oraz $[a, \infty)$.

Przykład 1.
Funkcja $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ jest ciągła na przedziale otwartym $(-1, 1)$, ale nie jest ciągła na przedziale domkniętym $[-1, 1]$, ponieważ zarówno $f(-1)$, jak i $f(1)$ nie są zdefiniowane.

Przykład 2.
Funkcja $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ jest ciągła na $[-1, 1]$. Proszę zauważyć, że $\lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = 0$ oraz $\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 0$.

Przykład 3.

Funkcja $f(x) = \sqrt{x-1}$ jest ciągła na $[1, \infty)$, ponieważ

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \sqrt{x-1} = \sqrt{x_0 - 1} = f(x_0) \quad \text{dla} \quad x_0 > 1$$

oraz $\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} = f(1) = 0$.

Uwaga.

Szybki przegląd funkcji trygonometrycznych pokazuje nam, że funkcje sinus i cosinus są funkcjami ciągłymi na przedziale $(-\infty, \infty)$. Funkcje tangens i secans są nieciągłe w punktach $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (ale punkty te nie należą do dziedziny tych funkcji, zatem możemy powiedzieć, że funkcje te są ciągłe w swojej dziedzinie). Podobnie, funkcje cotangens i cosecans są nieciągłe w punktach $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, które nie należą do dziedziny.

Twierdzenie

Jeśli f i g są funkcjami ciągłymi w punkcie x_0, to cf, gdzie c jest stałą, $f+g$, fg, oraz f/g, $g(x_0) \neq 0$, są również funkcjami ciągłymi w punkcie x_0.

Wniosek

Wielomian jest funkcją ciągłą na $(-\infty, \infty)$.

Wniosek

Funkcja wymierna $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie P oraz Q są wielomianami, jest ciągła dla wszystkich x, dla których $Q(x) \neq 0$.

Twierdzenie

Jeśli $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$ oraz f jest funkcją ciągłą w L, to

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)) = f(L).$$

Zatem złożenie $f \circ g$ dwóch funkcji ciągłych f i g jest funkcją ciągłą.

Twierdzenie o wartości średniej

Jeżeli f jest funkcją ciągłą na przedziale domkniętym $[a, b]$, dla której $f(a) \neq f(b)$, oraz jeśli N jest dowolną liczbą leżącą między $f(a)$ i $f(b)$, to istnieje co najmniej jedna taka liczba $c \in (a, b)$, dla której spełniona jest równość: $f(c) = N$.

Zatem twierdzenie o wartości średniej mówi, że funkcja ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$ przyjmuje wszystkie wartości pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$ (nie może "przeskoczyć" żadnej wartości). Ilustracja graficzna.

Powyższe twierdzenie ma ogromne znaczenie w numerycznym wyznaczaniu miejsc zerowych dowolnej funkcji.

Wniosek

Jeśli f spełnia założenia powyższego twierdzenia oraz $f(a)$ i $f(b)$ mają przeciwne znaki algebraiczne (co zapisujemy jako warunek $f(a)f(b) < 0$), to istnieje taka wartość $x \in (a, b)$, dla której $f(x) = 0$.

Ilustracja graficzna.

Uwaga.

Rodzaje nieciągłości funkcji mają swoje specjalne nazwy.

- Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L_1$ oraz $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L_2$, przy czym $L_1 \neq L_2$, to mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **nieciągłość pierwszego rodzaju typu "skok"**.
- Jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ istnieje, ale f jest albo niezdefiniowana w x_0, albo $f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, to mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **nieciągłość pierwszego rodzaju typu "luka"**.
- Jeżeli $x = x_0$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji $y = f(x)$, to mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **nieciągłość drugiego rodzaju**.

Przykład.

Funkcja $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1$, $x \neq 1$ jest niezdefiniowana w 1, ale $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$. Przyjmując zatem $f(1) = 2$, nowa funkcja

$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ jest już ciągła w każdym punkcie.