Pochodne - część 1

Dr Alina Gleska

Instytut Matematyki, Wydział Elektryczny,
Politechnika Poznańska

Definicja

Niech $y = f(x)$ będzie funkcją ciągłą. Styczną do wykresu funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$ nazywamy prostą, która przechodzi przez ten punkt i której kąt nachylenia do osi OX jest równy:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

o ile ta granica istnieje.
Kąt nachylenia stycznej do wykresu funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest również nazywany kątem nachylenia wykresu funkcji w danym punkcie. Styczna do wykresu może być również linią pionową, ale wówczas jej kąt nachylenia jest niezdefiniowany (wynosi 90 stopni)

Wykres funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ nie posiada stycznej, o ile jest spełniony któryś z poniższych warunków:

- f jest nieciągła w punkcie $x = x_0$ lub
- wykres funkcji f ma "róg" w punkcie $(x_0, f(x_0))$ lub
- wykres funkcji ma ostrze.

Przykład.
Pokazać, że wykres funkcji $f(x) = |x|$ nie posiada stycznej w punkcie (0,0).

Definicja

Pochodną funkcji $y = f(x)$ ze względu na zmienną x nazywamy

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

o ile ta granica istnieje.

Uwaga.

Inne oznaczenia pochodnej funkcji f: $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, y', $\dot{y}$, Dy, $D_x y$.

Przykład.

Wykazać, że:

- $(C)' = 0$, gdzie C jest stałą,
- $(x^2)' = 2x$, $(\sin(x))' = \cos(x)$.

Definicja
Wartość pochodnej w wybranym punkcie x_0 oznaczamy przez $f'(x_0)$.

Definicja
Proces znajdowania pochodnej nazywamy różniczkowaniem.
Jeżeli $f'(x_0)$ istnieje, to mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0.

Uwaga.
Jeżeli $y = f(x)$ jest funkcją ciągłą w punkcie $x = x_0$ oraz $f'(x_0) = 0$, to styczna w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest linią poziomą.

Definicja

Dziedziną pochodnej f' nazywamy zbiór liczb rzeczywistych x, dla których istnieje odpowiednia granica. Pochodna nie istnieje z tych samych powodów, dla jakich nie istnieje styczna do wykresu:

- funkcja jest nieciągła w punkcie $x = x_0$ lub
- wykres funkcji ma ostrze lub róg w punkcie $(x_0, f(x_0))$ lub
- styczna do wykresu jest pionowa.

Dziedziną pochodnej f' jest właściwy podzbiór dziedziny funkcji f.

Przykład.

1. $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ jest nieciągła w punkcie 0.5, a zatem f nie jest różniczkowalna w tym punkcie.
2. Wykres funkcji $f(x) = |x|$ ma ostrze w punkcie $(0,0)$. Wcześniej pokazaliśmy, że $f'(0)$ nie istnieje, a zatem f nie jest różniczkowalna w tym punkcie.
3. Wykres funkcji $f(x) = x^{1/3}$ ma styczną pionową w punkcie $(0,0)$, a zatem funkcja f również nie jest różniczkowalna w tym punkcie.

Definicja

Funkcja f jest różniczkowalna

- na przedziale otwartym (a,b), jeżeli f' istnieje dla każdej liczby z tego przedziału,
- na przedziale domkniętym [a,b], jeżeli f jest różniczkowalna na przedziale (a,b) oraz istnieją granice

$$f'_{+}(a) = \lim_{\Delta x \to 0^{+}} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}, \quad f'_{-}(b) = \lim_{\Delta x \to 0^{-}} \frac{f(b+\Delta x) - f(b)}{\Delta x}.$$

Granice te nazywamy prawostronną i lewostronną pochodną, odpowiednio.

Theorem

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to f jest ciągła w punkcie x_0.

Uwaga.

1. Z ciągłości nie wynika różniczkowalność (porównaj funkcję $f(x) = |x|$).
2. Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to styczna do wykresu funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma równanie:
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$
3. Normalną do wykresu funkcji f w punkcie P nazywamy prostą, która jest prostopadła do stycznej do wykresu funkcji w punkcie P.
$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Lista pochodnych funkcji elementarnych

- $(C)' = 0$, C – stała;
- $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
- $(a^x)' = a^x \ln(a)$;
- $(e^x)' = e^x$;
- $(\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}$;
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$;
- $(\sin(x))' = \cos(x)$;
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$;
- $(\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$;
- $(\operatorname{ctg}(x))' = \frac{-1}{\sin^2(x)}$;

- $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
- $(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;
- $(\mathrm{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$;
- $(\mathrm{arcctg}(x))' = \frac{-1}{1+x^2}$.

Theorem

Jeżeli f i g są funkcjami różniczkowalnymi, to cf, c stała, $f+g$, fg oraz f/g (gdzie $g(x) \neq 0$) są również funkcjami różniczkowalnymi.

Schematy różniczkowania

- Potęgowanie: $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$
- Mnożenie przez stałą: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
- Suma: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ (tę regułę można rozszerzyć na dowolną, skończoną sumę funkcji różniczkowalnych; zatem każdy wielomian jest funkcją różniczkowalną)

- Pochodna iloczynu funkcji: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- Pochodna ilorazu funkcji: $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- Pochodna funkcji złożonej: Jeżeli $f(u)$ jest różniczkowalną funkcją zmiennej u oraz $u = g(x)$ jest różniczkowalną funkcją zmiennej x, to

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x).$$

Theorem

Wyrażenia postaci

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

nazywamy wyrażeniami nieoznaczonymi, jeżeli przy x dążącym do x_0*,* ∞ *lub* $-\infty$ *mamy* $(f(x) \to 0$ *i* $g(x) \to 0)$ *lub* $(|f(x)| \to \infty$ *i* $|g(x)| \to \infty)$*. Symbolicznie takie wyrażenia nieoznaczone będziemy zapisywać jako* $\frac{0}{0}$ *lub* $\frac{\infty}{\infty}$*.*

Theorem (Reguła de l'Hospitala)

Załóżmy, że $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *jest wyrażeniem nieoznaczonym oraz, że granica* $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *istnieje. Wtedy*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Regułę de l'Hospitala można stosować również do granic jednostronnych.

Pozostałe wyrażenia nieoznaczone $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0 oraz 1^∞

W przypadku tych wyrażeń nieoznaczonych korzystamy z następujących przekształceń:

$$f_0 \cdot g_\infty = \frac{f_0}{\frac{1}{g_\infty}} = \frac{f_0}{h_0}; \quad f_0 \cdot g_\infty = \frac{g_\infty}{\frac{1}{f_0}} = \frac{g_\infty}{k_\infty};$$

$$f_\infty - g_\infty = \frac{1}{\frac{1}{f_\infty}} - \frac{1}{\frac{1}{g_\infty}} = \frac{\frac{1}{g_\infty} - \frac{1}{f_\infty}}{\frac{1}{f_\infty} \cdot \frac{1}{g_\infty}} = \frac{k_0 - h_0}{h_0 \cdot k_0}.$$

W przypadku nieoznaczoności typu 0^0, ∞^0 oraz 1^∞ używamy związku:

$$(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}.$$

Zatem

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}.$$

Przykład. Wyznaczyć granice:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} + 3x}{x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin(x))}{\ln(\sin(2x))}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0^-} (\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1})$;
4. $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)\ln(x-1)$;
5. $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)^{(x-1)}$;
6. $\lim\limits_{x\to 2^+} (\ln(\frac{1}{x-2}))^{x-2}$;
7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^+} (\mathrm{tg}(x))^{\mathrm{tg}(2x)}$.