Pochodne - część 2

Dr Alina Gleska

Instytut Matematyki, Wydział Elektryczny,
Politechnika Poznańska

EKSTREMA FUNKCJI

Definicja

Niech funkcja f będzie zdefiniowana na przedziale I. Wówczas maximum oraz minimum wartości funkcji f na przedziale I (o ile istnieje) będziemy nazywać ekstremami funkcji f.

Definicja

- Liczbę $f(c_1)$ nazywamy globalnym maximum funkcji f, jeżeli $f(x) \leq f(c_1)$ dla każdego x należącego do dziedziny funkcji f.
- Liczbę $f(c_1)$ nazywamy globalnym minimum funkcji f, jeżeli $f(x) \geq f(c_1)$ dla każdego x należącego do dziedziny funkcji f.

Ilustracja graficzna.

Theorem (O ekstremach funkcji)

Każda funkcja f ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$ osiąga na tym przedziale globalne maximum oraz globalne minimum.

Uwaga

Jeżeli przedział I nie jest przedziałem domkniętym (czyli np. jest postaci $[a, b)$, $(-\infty, b]$ lub $[a, \infty)$), to nawet ciągłość funkcji f nie gwarantuje istnienia globalnych ekstremów.
Ilustracja graficzna.

Definicja [Ekstrema lokalne]

- Liczbę $f(c_1)$ nazywamy lokalnym maximum funkcji f, jeżeli $f(x) \leq f(c_1)$ dla każdego x należącego do pewnego otwartego przedziału zawierającego c_1.
- Liczbę $f(c_1)$ nazywamy lokalnym minimum funkcji f, jeżeli $f(x) \geq f(c_1)$ dla każdego x należącego do pewnego otwartego przedziału zawierającego c_1.

Ilustracja graficzna.

Uwaga

Wstępna analiza wykresów sugeruje, że jeśli c jest argumentem, w którym funkcja f ma lokalne extremum, to albo $f'(c) = 0$, albo $f'(c)$ nie istnieje.

Definicja

Wartością krytyczną funkcji f nazywamy liczbę c należącą do dziedziny funkcji, dla której $f'(c) = 0$ lub $f'(c)$ nie istnieje.

Theorem

Jeśli funkcja f ma ekstremum lokalne dla argumentu c, to c jest wartością krytyczną.

Theorem

Jeżeli f jest funkcją ciągłą na przedziale domkniętym $[a, b]$, to ekstrema globalne występują albo na krańcach przedziału, albo w wartościach krytycznych w przedziale otwartym (a, b).

Znajdowanie globalnych ekstremów

Aby wyznaczyć globalne ekstremum funkcji f ciągłej na przedziale domkniętym $[a, b]$ wykonujemy następujące działania:

- Obliczamy wartość funkcji f w punktach a i b (na końcu przedziału).
- Znajdujemy wszystkie wartości krytyczne c_1, c_2, $\ldots$, c_n w (a, b).
- Obliczamy wartość funkcji f dla wszystkich wartości krytycznych.
- Największą oraz najmniejszą wartość z listy: $f(a)$, $f(b)$, $f(c_1)$, $f(c_2)$, $\ldots$, $f(c_n)$ przyjmujemy za globalne maximum oraz za globalne minimum, odpowiednio, funkcji f na przedziale $[a, b]$.

Przykład

1. Wyznaczyć wartości krytyczne dla funkcji: $f(x) = (x-1)^2\sqrt[3]{x+2}$ oraz $f(x) = \frac{x+4}{\sqrt[3]{x+1}}$.
2. Wyznaczyć ekstrema globalne dla danych funkcji na wskazanych przedziałach: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ na $[-4, 3]$ oraz $f(x) = x^4(x-1)^2$ na $[-1, 2]$.

Theorem (Twierdzenie Rolle'a)

Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$, różniczkowalną na przedziale (a, b) taką, że $f(a) = f(b)$. Wówczas istnieje liczba c w (a, b) taka, że $f'(c) = 0$.

Theorem (Twierdzenie Lagrange'a)

Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$, różniczkowalną na przedziale (a, b). Wówczas istnieje liczba c w (a, b) taka, że

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ilustracja graficzna.
Geometrycznie, twierdzenie o wartości średniej mówi, że kąt nachylenia stycznej w punkcie $(c, f(c))$ jest taki sam jak kąt nachylenia siecznej przechodzącej przez punkty $(a, f(a))$ oraz $(b, f(b))$.

Uwaga Przypomnijmy:

- funkcję f nazywamy rosnącą na przedziale I, jeżeli $f(x_1) < f(x_2)$ dla dowolnych argumentów x_1 i x_2 z przedziału I spełniających warunek $x_1 < x_2$,
- funkcję f nazywamy malejącą na przedziale I, jeżeli $f(x_1) > f(x_2)$ dla dowolnych argumentów x_1 i x_2 z przedziału I spełniających warunek $x_1 < x_2$.

Theorem

Jeśli $f'(x) = 0$ dla każdego x z przedziału $[a, b]$, to $f(x)$ jest funkcją stałą w tym przedziale.

Theorem

Niech f będzie funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$ i różniczkowalną na przedziale (a, b).

- *Jeśli $f'(x) > 0$ dla każdego x z przedziału (a, b), to f jest rosnąca na przedziale (a, b).*
- *Jeśli $f'(x) < 0$ dla każdego x z przedziału (a, b), to f jest malejąca na przedziale (a, b).*

Przykład Sprawdź monotoniczność funkcji:

$$f(x) = x\sqrt{8 - x^2} \qquad f(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Jeżeli zróżniczkujemy pochodną I rzędu $f'(x)$, to otrzymamy kolejną funkcję, którą nazywamy pochodną drugiego rzędu (w skrócie: drugą pochodną) i oznaczamy przez $f''(x)$. Zakładając, że wszystkie pochodne istnieją możemy różniczkować funkcję $y = f(x)$ tyle razy, ile chcemy. Zatem trzecią pochodną nazywamy pochodną drugiej pochodnej. Podobnie, czwartą pochodną nazywamy pochodną trzeciej pochodnej itd. Uogólniając, jeśli n jest liczbą naturalną, to n-tą pochodną funkcji $y = f(x)$ definiujemy jako

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Wypukłość i wklęsłość funkcji – własności funkcji mówiące o jej położeniu względem jej stycznej w danym punkcie. Jeśli krzywa znajduje się

- nad styczną – mówimy, że jest wypukła (wypukła w dół),
- pod styczną – mówimy, że jest wklęsła (wypukła w górę).

Theorem

Niech f będzie funkcją, dla której f'' istnieje na przedziale (a,b).

- *Jeśli $f''(x) > 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$, to wykres funkcji f jest wypukły w dół na przedziale (a,b).*
- *Jeśli $f''(x) < 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$, to wykres funkcji f jest wypukły w górę na przedziale (a,b).*

Definicja

Niech f będzie funkcją ciągłą dla argumentu c. Punkt $(c, f(c))$ nazywamy punktem przegięcia, jeżeli istnieje otwarty przedział (a, b) zawierający c taki, że wykres funkcji f jest

- wypukły w dół na przedziale (a, c) i wypukły w górę na przedziale (c, b) ALBO
- wypukły w górę na przedziale (a, c) i wypukły w dół na przedziale (c, b).

Wniosek

Punkt przegięcia $(c, f(c))$ jest wyznaczony przez argument c, dla którego $f''(x) = 0$ lub $f''(c)$ nie istnieje.

Przykład

Sprawdzić wypukłość funkcji: $f(x) = \ln(x) + 3x - 1$ oraz $f(x) = xe^x$.

Theorem (Test drugiej pochodnej dla lokalnych ekstremów)

Niech f będzie funkcją, dla której f'' istnieje na przedziale (a, b) zawierającym wartość krytyczną c.

- *Jeśli $f''(c) > 0$, to $f(c)$ jest lokalnym minimum.*
- *Jeśli $f''(c) < 0$, to $f(c)$ jest lokalnym maximum.*

Przykład

Sprawdzić wypukłość poniższych funkcji:

1. $f(x) = x^3(x+1)^2$
2. $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$
3. $f(x) = x\sqrt{x-6}$

Theorem

Niech f będzie funkcją taką, że $f^{(n+1)}(x)$ istnieje dla każdego x z przedziału $(a-r, a+r)$. Wówczas dla każdego x z tego przedziału

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

gdzie

$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$
nazywamy wielomianem Taylora n-tego rzędu funkcji f w punkcie a, a

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad c \in (a,x)$$

nazywamy n-tą resztą szeregu w postaci Lagrange'a.

Theorem

Jeżeli funkcja f ma pochodne wszystkich rzędów w każdym punkcie x przedziału $(a-r, a+r)$ oraz $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ dla każdego x z tego przedziału, to

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Szereg taki nazywamy szeregiem Taylora funkcji f w punkcie a.

Jeżeli $a = 0$, to otrzymujemy szczególny przypadek szeregu Taylora:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Szereg taki nazywamy szeregiem Maclaurina funkcji f.

Przykład

Poniżej znajduje się lista ważniejszych szeregów Maclaurina.

1. $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$;
2. $\cos(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$;
3. $\sin(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$;
4. $\cosh(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$;
5. $\sinh(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$;
6. $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} x^{k+1}$.