Całka nieoznaczona

Dr Alina Gleska

Instytut Matematyki, Wydział Elektryczny,
Politechnika Poznańska

Całka nieoznaczona

Do tej pory rozważaliśmy problem:
"Dla danej funkcji f znaleźć jej pochodną f'".

Obecnie zajmiemy się równie ważnym problemem:
"Dla danej funkcji f znaleźć funkcję, której pochodna jest równa f".

Definicja

Funkcją pierwotną funkcji f określonej na przedziale (a, b) nazywamy funkcję F taką, że $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$.

Przykład

Funkcją pierwotną funkcji $f(x) = x^2$ jest $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, ponieważ $F'(x) = x^2$ (ale również $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 10$, $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \pi$ itp.).

Twierdzenie

Jeśli $G'(x) = F'(x)$ dla wszystkich $x \in [a, b]$, to $G(x) = F(x) + C$, gdzie C jest stałą.

Definicja

Całką nieoznaczoną funkcji f określonej na przedziale $[a, b]$ nazywamy wyrażenie $F(x) + C$, gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f, a C jest dowolną liczbą rzeczywistą (nazywaną stałą całkowania). Zapis symboliczny:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Symbol $\int$ nazywamy znakiem całkowania, a zapis $\int f(x)dx$ oznacza całkę nieoznaczoną funkcji f ze względu na zmienną x.

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f jest całkowalna w przedziale $[a,b]$, to

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad \text{dla każdego} \quad x \in [a,b].$$

Twierdzenie

Jeżeli funkcja f' jest całkowalna w przedziale $[a,b]$, to

$$\int f'(x)dx = f(x) + C \quad \text{dla każdego} \quad x \in [a,b].$$

Całki funkcji elementarnych

- $\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$, gdzie $\alpha \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$,
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \Rightarrow \int e^x dx = e^x + C$,
- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$,
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$,
- $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \mathrm{tg}(x) + C$,
- $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\mathrm{ctg}(x) + C$,
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg}(x) + C$,
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$.

Liniowość całki nieoznaczonej

Jeśli $F'(x) = f(x)$ i $G'(x) = g(x)$ oraz a, b są stałymi, to:

$$\int a \cdot f(x) \pm b \cdot g(x) dx = a \cdot \int f(x) dx \pm b \cdot \int g(x) dx =$$

$$= a \cdot F(x) \pm b \cdot G(x) + C.$$

Przykład.

- $\int (x^3 + \frac{2}{x^2} - 5\sqrt{x} + \frac{7}{\sqrt[5]{x^3}}) dx$,
- $\int \frac{x^2-5}{x^2+1} dx$, $\quad \int \frac{1}{\sin^2(x)\cos^2(x)} dx$,
- $\int \frac{\cos(2x)}{\cos(x)-\sin(x)} dx$, $\quad \int \frac{1+\cos^2(x)}{1+\cos(2x)} dx$.

Całkowanie przez podstawienie

Jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji f, to

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

Przykład.

1. $\int \frac{1}{ax+b}dx = \left| \begin{array}{l} t = ax+b \\ dt = a \cdot dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{a \cdot t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C,$
2. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \left| \begin{array}{l} t = f(x) \\ dt = f'(x) \cdot dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$

Przykład. Wyznaczyć całki: $\int \frac{1}{2x+5}dx$, $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+12}dx$, $\int \frac{1}{(7x+13)^{29}}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{5x+7}}dx$, $\int x\sqrt{x^2+5}dx$, $\int \frac{x^3}{\sqrt[5]{x^4+3}}dx$, $\int \operatorname{tg}(x)dx$, $\int \operatorname{ctg}(x)dx$, $\int \sin^5(x)\cos(x)dx$, $\int \sin(7x)dx$, $\int \frac{1}{x^2+25}dx$, $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$, $\int \frac{e^{2x}}{e^x-1}dx$, $\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{4-9\sin^2(x)}}dx$.

Całkowanie przez części

Jeśli funkcje f i g są różniczkowalne na pewnym przedziale (a, b), to

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Przykład. Wyznaczyć całki: $\int x \cdot \cos(x)dx$, $\int \ln(x)dx$, $\int x \cdot \ln(x)dx$, $\int \ln(x^2+1)dx$, $\int \operatorname{arctg}(x)dx$, $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$, $\int e^x \cdot \sin(x)dx$.

Całkowanie funkcji trygonometrycznych

Przykład. Wyznaczyć całki: $\int \sin(x)dx$, $\int \cos(x)dx$, $\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx$, $\int \frac{1}{\sin^2(x)}dx$, $\int \sin(x)\cos(x)dx$, $\int \sin^2(x)dx$, $\int \cos^2(x)dx$, $\int \sin^2(x)\cos^2(x)dx$, $\int \sin^3(x)dx$, $\int \sin^3(x)\cos^2(x)dx$, $\int \sin^2(x)\cos^5(x)dx$, $\int \sin^3(x)\cos^3(x)dx$.

Wzory rekurencyjne:

$$\int \sin^n(x)dx = -\frac{1}{n}\cos(x)\sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)dx$$

oraz

$$\int \cos^n(x)dx = \frac{1}{n}\sin(x)\cos^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)dx.$$

Przykład. Wyznaczyć całki: $\int \sin^4(x)dx$ i $\int \cos^6(x)dx$.

Wzory redukcyjne:

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)),$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)),$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)).$$

Przykład. Wyznaczyć całki: $\int \sin(3x)\cos(2x)dx$, $\int \cos(5x)\cos(7x)dx$ oraz $\int \sin(5x)\sin(2x)dx$.

Podstawienie uniwersalne:

$$\begin{array}{ll} t = \operatorname{tg}(\frac{x}{2}) & \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt & \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}$$

Przykład. Wyznaczyć całki: $\int \frac{dx}{2+\cos(x)}$ oraz $\int \frac{dx}{1+\sin(x)+\cos(x)}$.