Macierze

Dr Alina Gleska

Instytut Matematyki, Wydział Elektryczny,
Politechnika Poznańska

Obecnie zajmiemy się obiektami innego typu.

Definicja

Niech $m, n \in \mathbb{N}$. Tablicę liczb

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą. Będziemy używali skróconego zapisu $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, gdzie $i = 1, \ldots, m$ oraz $j = 1, \ldots, n$. Mówimy, że macierz A jest macierzą wymiaru m na n. Oznacza to, że macierz A ma m wierszy i n kolumn.

Przykład

Dla każdej z poniższych macierzy określić liczbę wierszy i kolumn:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & -5 & 9 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Definicja

Macierz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

która ma tyle samo wierszy i kolumn nazywamy macierzą kwadratową rzędu n. Elementy $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ tworzą jej główną przekątną.

Definicja

Macierz kwadratową postaci

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą jednostkową rzędu n, a macierz

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

macierzą zerową o wymiarze $(m \times n)$.

Definicja

Macierz wymiaru $(1 \times n)$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

nazywamy *n-wymiarowym wektorem wierszowym* lub w skrócie $(1 \times n)$ wektorem. Macierz wymiaru $(m \times 1)$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

nazywamy *m-wymiarowym wektorem kolumnowym*.

Definicja

Macierz kwadratową wymiaru $n \times n$ postaci

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

nazywamy $n \times n$ macierzą diagonalną. Zbiór wszystkich wektorów o elementach rzeczywistych m-wymiarowych oznaczamy przez $\mathbb{R}^m$, a o elementach zespolonych przez $\mathbb{C}^m$.

Definicja

Niech $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ będą macierzami o tych samych wymiarach. Wówczas $A + B$ jest macierzą tego samego wymiaru złożoną z sumy elementów macierzy A i B, tzn.

$$A + B = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Przykład

Jeżeli $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -i \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, to

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definicja

Niech $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ będą macierzami o tych samych wymiarach. Wówczas $A - B$ jest macierzą tego samego wymiaru złożoną z różnic elementów macierzy A i B, tzn.

$$A - B = [a_{ij}]_{m\times n} - [b_{ij}]_{m\times n} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & a_{m3}-b_{m3} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Przykład

Jeżeli $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -i \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, to

$$C = A - B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3i \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definicja

Niech $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ będzie macierzą, a $\alpha \in \mathbb{R}$ stałą liczbową. Wówczas αA jest macierzą złożoną ze wszystkich elementów macierzy A przemnożonych przez α, tzn.

$$\alpha A = \alpha[a_{ij}]_{m\times n} = [\alpha a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \alpha a_{m3} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Przykład

Jeśli $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\alpha = 3$, to

$$\alpha A = 3A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 6i \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Definicja

Macierze A i B są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy A i B mają te same wymiary oraz odpowiadające sobie elementy są równe, tzn. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ oraz $a_{ij} = b_{ij}$ dla $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Twierdzenie

Niech $s, t \in \mathbb{R}$ będą dowolnymi stałymi rzeczywistymi oraz $A, B, C, 0$ macierzami tych samych wymiarów. Dodawanie, odejmowanie i mnożenie macierzy przez skalar ma następujące własności:

1. (A + B) + C = A + (B + C) (prawo rozdzielności dla dodawania);
2. A + B = B + A (prawo przemienności dla dodawania);
3. 0 + A = A;
4. A + (-A) = 0;
5. (s + t)A = sA + tA, (s - t)A = sA - tA;
6. t(A + B) = tA + tB, t(A - B) = tA - tB;
7. s(tA) = (st)A;
8. 1A = A, 0A = 0, (-1)A = -A;
9. If tA = 0, then t = 0 or A = 0.

Definicja

Niech $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ będzie macierzą wymiaru $m \times n$ oraz $B = [b_{jk}]_{n\times p}$ będzie macierzą wymiaru $n \times p$ (liczba kolumn macierzy A równa się liczbie wierszy macierzy B). Wówczas AB jest $m \times p$ macierzą $C = [c_{ik}]_{m\times p}$, której element na pozycji (i, k) wyznaczamy ze wzoru:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{in} b_{nk}.$$

Ilustracja graficzna

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \color{red}{a_{21}} & \color{red}{a_{22}} & \color{red}{a_{23}} & \cdots & \color{red}{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \color{blue}{b_{13}} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \color{blue}{b_{23}} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \color{blue}{b_{n3}} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \color{green}{c_{23}} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy nie jest przemienne.

Przykład

Jeśli $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, to

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

oraz

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Mnożenie macierzy ma własności:

1. Jeżeli $A = [a]_{m \times n}$, $B = [b]_{n \times p}$ i $C = [c]_{p \times r}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, to $(AB)C = A(BC)$, $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ (prawo łączności).
2. Jeżeli $D = [d]_{m \times n}$, $A, B_{n \times p}$ i $C = [c]_{p \times r}$, to $D(A \pm B) = DA \pm DB$, $(A \pm B)C = AC \pm BC$ (prawo rozdzielności).

Definicja

Niech $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ będzie macierzą wymiaru $m \times n$. Macierzą transponowaną macierzy A nazywamy macierz A^T wymiaru $n \times m$, której elementy definiujemy następująco:

$$A^T = ([a_{ij}]_{m\times n})^T = [a'_{ij}]_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

tzn. $a'_{ij} = a_{ji}$ dla $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Jak widać operacja transponowania polega na zamianie wierszy na kolumny.

Własności macierzy transponowanych Niech A będzie macierzą wymiaru $m \times n$ oraz niech B będzie macierzą $n \times p$, a α, β stałymi. Wówczas

1. $(AB)^T = B^T A^T$;
2. $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$;
3. $(A^T)^T = A$;
4. $(A^r)^T = (A^T)^r$ dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$.