STATYSTYKA OPISOWA

Dr Alina Gleska

Instytut Matematyki WE PP

28 września 2018

Załóżmy, że rozpatrujemy zbiór produktów, towarów lub usług niesumowalnych w jednostkach fizycznych w dwóch okresach: 0 – podstawowym oraz 1 – badanym. Dane są ilości (fizyczne rozmiary) tych produktów q_{0i} i q_{1i} oraz ich ceny p_{0i} i p_{1i}, natomiast iloczyn ilości i cen określa wartość produkcji. Na podstawie tych danych obliczamy indeksy agregatowe (zespołowe) dla wielkości absolutnych: wartości, ilości i cen.

Agregatowy indeks wartości I_w oblicza się według wzoru:

$$I_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{1i}p_{1i}}{\sum_{i=1}^{n} q_{0i}p_{0i}}.$$

Agregatowy indeks wartości pokazuje zmiany w wartości produktów (towarów, usług) w okresie badanym w stosunku do okresu podstawowego.
Wielkość $(I_w - 1) \cdot 100\% > 0$ pokazuje, o ile procent wzrosła wartość produktów (towarów, usług) w okresie badanym w stosunku do okresu podstawowego.

Wielkość $(I_w - 1) \cdot 100\% < 0$ informuje o procentowym spadku tej wartości, natomiast $(I_w - 1) \cdot 100\% = 0$ mówi o braku zmian.

Indeksy ilości i cen można wyznaczyć według dwóch formuł standaryzacyjnych: Laspeyresa i Paaschego. Ich zastosowanie polega na ustaleniu stałego poziomu jednego z dwóch czynników: cen albo ilości. Dla uzyskania agregatowego indeksu ilości unieruchamiane są ceny, natomiast dla otrzymania agregatowego indeksu cen unieruchamiane są ilości.
W przypadku, gdy interesuje nas zbadanie dynamiki zmian rozmiarów produkcji obliczamy agregatowe indeksy ilości według formuł Laspeyresa (przyjmują jako stałe ceny z okresu podstawowego) i Paaschego (przyjmują jako stałe ceny z okresu badanego).

Agregatowy indeks ilości według formuły Laspeyresa wyraża się jako:

$$I_q^L = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{1i}p_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} q_{0i}p_{0i}}.$$

Formułę tę możemy zapisać również w postaci:

$$\begin{aligned} I_q^L &= \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{1i}p_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} q_{0i}p_{0i}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{q_{1i}}{q_{0i}} q_{0i}p_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} q_{0i}p_{0i}} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} i_{qi} q_{0i}p_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} q_{0i}p_{0i}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q_{0i}p_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} q_{0i}p_{0i}} i_{qi} \right), \end{aligned}$$

gdzie $i_{qi} = q_{1i}/q_{0i}$ jest indywidualnym indeksem ilości dla i-tego produktu.
Zatem agregatowy indeks ilości według formuły Laspeyresa można traktować jako średnią arytmetyczną ważoną wartości indywidualnych indeksów ilości, przyjmując wyrażenia

$$v_i = \frac{q_{0i}p_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} q_{0i}p_{0i}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

za wagi unormowane (tzn. $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 1$ oraz $v_i \geq 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$).

Formuła Laspeyresa dla ilości

Wielkość $(I_q^L - 1) \cdot 100\%$ pokazuje, o ile wzrosła lub zmalała produkcja w okresie badanym w porównaniu z okresem podstawowym, przy założeniu stałych cen produktów z okresu podstawowego.

Agregatowy indeks ilości według formuły Paaschego wyraża się jako:

$$I_q^P = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{1i}p_{1i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{0i}p_{1i}}.$$

Po przekształceniu tej formuły mamy:

$$\begin{aligned} I_q^P &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{1i}p_{1i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{0i}p_{1i}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{1i}p_{1i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{q_{0i}}{q_{1i}} q_{1i}p_{1i}} = \\ &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{1i}p_{1i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i_{qi}} q_{1i}p_{1i}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{1i}p_{1i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{q_{1i}p_{1i}}{i_{qi}}} = \frac{W}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{w_i}{i_{qi}}}, \end{aligned}$$

gdzie $W = \sum_{i=1}^{n} w_i$, a $w_i = q_{1i}p_{1i}$.

Oznacza to, że agregatowy indeks ilości według formuły Paaschego można traktować jako średnią harmoniczną indywidualnych indeksów ilości, przyjmując wyrażenia $w_i = q_{1i}p_{1i}$ za wagi. Wielkość $(I_q^P - 1) \cdot 100\%$ mówi o zmianach ilości produkcji w okresie badanym w porównaniu z okresem podstawowym, przy założeniu stałych cen produktów z okresu badanego.

Agregatowy indeks cen według formuły Laspeyresa wyraża się jako:

$$I_p^L = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{0i}p_{1i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{0i}p_{0i}}.$$

Formułę tę możemy zapisać również w postaci:

$$\begin{aligned} I_p^L &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{0i}p_{1i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{0i}p_{0i}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{0i}p_{0i}\frac{p_{1i}}{p_{0i}}}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{0i}p_{0i}} = \\ &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{0i}p_{0i}i_{pi}}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{0i}p_{0i}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{q_{0i}p_{0i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} q_{0i}p_{0i}} i_{pi}\right), \end{aligned}$$

Formuła Laspeyresa dla cen

gdzie $i_{pi} = p_{1i}/p_{0i}$ jest indywidualnym indeksem cen dla i-tego produktu.
Zatem agregatowy indeks cen według formuły Laspeyresa można traktować jako średnią arytmetyczną ważoną wartości indywidualnych indeksów cen. Wielkość $(I_p^L - 1) \cdot 100\%$ pokazuje, o ile wzrosły lub zmalały ceny produktów w okresie badanym w porównaniu z okresem podstawowym, przy założeniu stałych ilości produkcji z okresu podstawowego.

Agregatowy indeks cen według formuły Paaschego dany jest wzorem:

$$I_p^P = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{1i} p_{1i}}{\sum_{i=1}^{n} q_{1i} p_{0i}}.$$

Po przekształceniu tej formuły mamy:

$$\begin{aligned} I_p^P &= \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{1i} p_{1i}}{\sum_{i=1}^{n} q_{1i} p_{0i}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{1i} p_{1i}}{\sum_{i=1}^{n} q_{1i} p_{1i} \frac{p_{0i}}{p_{1i}}} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{1i} p_{1i}}{\sum_{i=1}^{n} q_{1i} p_{1i} \frac{1}{i_{pi}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{1i} p_{1i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{q_{1i} p_{1i}}{i_{pi}}} = \frac{W}{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{i_{pi}}}, \end{aligned}$$

Formuła Paaschego dla cen

gdzie $W = \sum_{i=1}^{n} w_i$, a $w_i = q_{1i} p_{1i}$.

Agregatowy indeks cen według formuły Paaschego można traktować jako średnią harmoniczną indywidualnych indeksów cen. Wielkość $(I_p^P - 1) \cdot 100\%$ pokazuje, o ile wzrosły lub zmalały ceny produktów w okresie badanym w porównaniu z okresem podstawowym, przy założeniu stałych ilości produkcji z okresu badanego.

Stosując średnią geometryczną z indeksów obliczanych według formuł Laspeyresa i Paaschego, uzyskamy indeksy Fishera:

$$I_q^F = \sqrt{I_q^L \cdot I_q^P} \quad \text{i} \quad I_p^F = \sqrt{I_p^L \cdot I_p^P}.$$

Ponadto między zdefiniowanymi indeksami wartości, ilości i cen istnieje związek określany mianem równości indeksowej:

$$I_w = I_q^L \cdot I_p^P \quad \text{oraz} \quad I_w = I_q^P \cdot I_p^L.$$

Do badania dynamiki zmian cen służą również indeksy nożyc cen. Np. w rolnictwie wykorzystuje się je do porównywania zmian cen produktów sprzedawanych przez rolników ze zmianami cen produktów nabywanych przez rolników w okresie badanym w odniesieniu do okresu podstawowego.

Indeks nożyc cen obliczamy ze wzoru:

$$I_N = \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} Q_{1i} P_{1i}}{\sum\limits_{i=1}^{m} Q_{1i} P_{0i}} \;\Big/\; \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} q_{1j} p_{1j}}{\sum\limits_{j=1}^{n} q_{1j} p_{0j}} \right),$$

gdzie:

- Q_{1i} – ilość i-tego produktu sprzedanego przez rolników w okresie badanym,
- q_{1j} – ilość j-tego produktu zakupionego przez rolników w okresie badanym,
- P_{1i} i P_{0i} – cena i-tego produktu sprzedanego przez rolników, odpowiednio w okresie badanym i podstawowym,
- p_{1j} i p_{0j} – cena j-tego produktu zakupionego przez rolników, odpowiednio w okresie badanym i podstawowym.

Jeśli $(I_N - 1) \cdot 100\% > 0$, to ceny produktów sprzedanych przez producentów wzrosły w większym stopniu niż ceny produktów przez nich zakupionych. Sytuacja ta była więc korzystna z punktu widzenia producentów. Jeśli natomiast $(I_N - 1) \cdot 100\% < 0$, to mniejszy był wzrost cen produktów sprzedanych aniżeli cen produktów zakupionych. Taka sytuacja jest więc niekorzystna dla producentów.
PRZYKŁAD.

Agregatowy indeks cen Törnqvista dla okresów t i s ($s = t + m$, $m \geq 1$ – liczba badanych okresów) definiuje się jako:

$$P^T_{s/t} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{is}}{p_{it}} \right)^{(w_{is}+w_{it})/2},$$

gdzie $w_{ij} = p_{ij}q_{ij} / \sum_{i=1}^{n} p_{ij}q_{ij}$ jest udziałem wartości i-tego produktu lub usługi w j-tym okresie ($j = t, s$). Po zlogarytmowaniu mamy:

$$\log(P^T_{s/t}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (w_{is} + w_{it}) \log\left(\frac{p_{is}}{p_{it}}\right).$$

Wielkość $(P^T_{s/t} - 1) \cdot 100\%$ pokazuje, o ile wzrosły (lub spadły) ceny produktów w okresie badanym w porównaniu z okresem podstawowym.

Agregatowy indeks ilości Törnqvista dla okresów t i $s = t + m$ dany jest wzorem:

$$Q^T_{s/t} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{q_{is}}{q_{it}} \right)^{(w_{is}+w_{it})/2},$$

gdzie w_{ij} jest zdefiniowany jak wyżej.Po zlogarytmowaniu otrzymujemy:

$$\log(Q^T_{s/t}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (w_{is} + w_{it}) \log \left(\frac{q_{is}}{q_{it}} \right).$$

Wielkość $(Q^T_{s/t} - 1) \cdot 100\%$ pokazuje, o ile wzrosły (lub spadły) ilości produkcji w okresie badanym w porównaniu z okresem podstawowym.

Agregatowy indeks łańcuchowy cen dla kolejnych porównywanych okresów z przedziału czasowego $[t, s = t + m - 1]$, gdzie $m \geq 2$ oznacza liczbę badanych okresów, definiuje się jako:

$$\overline{P}_{s/t} = \left(\prod_{k=t}^{s-1} P_{k+1/k} \right)^{1/(m-1)},$$

przy czym za indeks $P_{k+1/k}$ można przyjąć agregatowy indeks cen według formuły Laspeyresa, Paaschego lub Törnqvista dla dwóch sąsiadujących okresów.
Wielkość $(\overline{P}_{s/t} - 1) \cdot 100\%$ pokazuje, o ile średnio wzrastały (lub spadały) ceny w przeliczeniu na okres w badanym przedziale czasowym.

Agregatowy indeks łańcuchowy ilości dla kolejnych porównywanych okresów z przedziału czasowego $[t, s = t + m - 1]$, gdzie $m \geq 2$ oznacza liczbę badanych okresów, definiuje się jako:

$$\overline{Q}_{s/t} = \left(\prod_{k=t}^{s-1} Q_{k+1/k} \right)^{1/(m-1)},$$

gdzie indeks $Q_{k+1/k}$ może być określony za pomocą agregatowego indeksu ilości według formuły Laspeyresa, Paaschego lub Törnqvista dla dwóch sąsiadujących okresów. Wielkość $(\overline{Q}_{s/t} - 1) \cdot 100\%$ pokazuje, o ile średnio wzrastały (lub spadały) ilości produkcji w przeliczeniu na okres w badanym przedziale czasowym.