STATYSTYKA OPISOWA

Dr Alina Gleska

Instytut Matematyki WE PP

28 września 2018

1. Miary asymetrii

Miary asymetrii pozwalają określić, czy jednostki zbiorowości mają tendencje do skupiania się przy niskich wartościach cechy (tzw. asymetria prawostronna, dodatnia), przy wysokich wartościach cechy (asymetria lewostronna, ujemna), czy też skupiają się wokół wartości centralnej (rozkład symetryczny). Określenie asymetrii jako prawostronna czy lewostronna należy łączyć z położeniem ogona rozkładu (po prawej lub po lewej stronie rozkładu). Natomiast określenie dodatnia czy ujemna wiąże się ze znakiem + lub - obliczonej miary asymetrii.

KLASYFIKACJA MIAR ASYMETRII

- pozycyjne
  - pozycyjny wskaźnik skośności W_{poz}
  - pozycyjny współczynnik asymetrii A_Q
- klasyczne
  - moment centralny trzeciego rzędu m_3
  - klasyczny współczynnik asymetrii A_s
- klasyczno-pozycyjne
  - wskaźnik skośności W_{sk}
  - współczynnik asymetrii Pearsona A_p

Pozycyjny wskaźnik skośności W_{poz} jest różnicą odległości kwartyli trzeciego i pierwszego od mediany, tzn.

$$W_{poz} = (Q_3 - Me) - (Me - Q_1) = Q_1 + Q_3 - 2Me.$$

Własności:

- $W_{poz} = 0$, tj. $Q_3 - Me = Me - Q_1$ - rozkład symetryczny
- $W_{poz} > 0$, tj. $Q_3 - Me > Me - Q_1$ - asymetria prawostronna
- $W_{poz} < 0$, tj. $Q_3 - Me < Me - Q_1$ - asymetria lewostronna

UWAGI:
1) pozycyjny wskaźnik skośności ocenia kierunek asymetrii nie całego rozkładu, a jedynie 50% środkowych jednostek (określa, czy wśród nich przeważają wartości większe od mediany czy mniejsze),
2) wskaźnik W_{poz} pozwala ocenić wyłącznie kierunek asymetrii, bo jest miarą absolutną. Aby ocenić siłę asymetrii posługujemy się pozycyjnym współczynnikiem asymetrii.

POZYCYJNY WSPÓŁCZYNNIK ASYMETRII

$$A_Q = \frac{W_{poz}}{R_0} = \frac{Q_1 + Q_3 - 2Me}{Q_3 - Q_1}.$$

Współczynnik A_Q określa kierunek i siłę asymetrii tylko w centralnej części rozkładu, tj. dla 50% środkowych jednostek (znajdujących się między Q_1 i Q_3).
Zazwyczaj $A_Q \in [-1, 1]$, jedynie w przypadku skrajnej asymetrii A_Q przekracza ± 1.

ZNAK współczynnika A_Q informuje o KIERUNKU asymetrii, tzn.

- $A_Q = 0$ - symetria,
- $A_Q > 0$ - asymetria prawostronna (dodatnia),
- $A_Q < 0$ - asymetria lewostronna (ujemna),

natomiast jego WARTOŚĆ BEZWGLĘDNA $|A_Q|$ o SILE asymetrii:

- $0 - 0,2$ - asymetria rozkładu bardzo słaba,
- $0,2 - 0,4$ - asymetria rozkładu słaba,
- $0,4 - 0,6$ - asymetria rozkładu umiarkowana,
- $0,6 - 0,8$ - asymetria rozkładu silna,
- powyżej $0,8$ - asymetria rozkładu bardzo silna,

przy czym chodzi o asymetrię połowy środkowych jednostek.

Moment centralny trzeciego rzędu obliczamy zgodnie ze wzorem:

$$m_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3.$$

Należy on do szerszej grupy tzw. momentów centralnych:

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^k.$$

Tak więc miara m_2 jest wariancją, m_3 - momentem centralnym trzeciego rzędu, m_4 - momentem centralnym czwartego rzędu itd. Moment centralny drugiego rzędu jest miarą zróżnicowania, moment centralny trzeciego rzędu - miarą asymetrii, natomiast moment centralny czwartego rzędu - miarą koncentracji.

KLASYCZNY WSPÓŁCZYNNIK ASYMETRII

$$A_s = \frac{m_3}{s^3} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3}{s^3}.$$

Zazwyczaj $A_s \in [-2, 2]$, jedynie w przypadku skrajnej asymetrii A_s przekracza ± 2.
A_s jest względną miarą asymetrii. Jako wielkość niemianowana może służyć do porównań asymetrii dwu lub więcej rozkładów.

ZNAK współczynnika A_s informuje o KIERUNKU asymetrii, tzn.

- $A_s = 0$ - symetria,
- $A_s > 0$ - asymetria prawostronna (dodatnia),
- $A_s < 0$ - asymetria lewostronna (ujemna),

natomiast jego WARTOŚĆ BEZWGLĘDNA $|A_s|$ o SILE asymetrii:

- $0 - 0,4$ - asymetria rozkładu bardzo słaba,
- $0,4 - 0,8$ - asymetria rozkładu słaba,
- $0,8 - 1,2$ - asymetria rozkładu umiarkowana,
- $1,2 - 1,6$ - asymetria rozkładu silna,
- powyżej $1,6$ - asymetria rozkładu bardzo silna.

WSKAŹNIK SKOŚNOŚCI

$$W_{sk} = \overline{x} - Do.$$

Wskaźnik ten wyznacza kierunek asymetrii, ale nie informuje o jej sile. Jest miarą mianowaną (ma takie miano, jak badana cecha), a więc jest miarą absolutną i nie może służyć do porównania siły asymetrii różnych rozkładów.

Własności:

- $W_{sk} = 0$ - rozkład symetryczny
- $W_{sk} > 0$ - asymetria prawostronna
- $W_{sk} < 0$ - asymetria lewostronna.

WSPÓŁCZYNNIK ASYMETRII PEARSONA

$$A_p = \frac{\overline{x} - Do}{s}$$

pozwala określić zarówno kierunek, jak i siłę asymetrii.
Zazwyczaj $A_p \in [-1, 1]$, jedynie w przypadku skrajnej asymetrii A_p przekracza ± 1.

ZNAK współczynnika A_p informuje o KIERUNKU asymetrii, tzn.

- $A_p = 0$ - symetria,
- $A_p > 0$ - asymetria prawostronna (dodatnia),
- $A_p < 0$ - asymetria lewostronna (ujemna),

natomiast jego WARTOŚĆ BEZWGLĘDNA $|A_p|$ o SILE asymetrii:

- $0 - 0,2$ - asymetria rozkładu bardzo słaba,
- $0,2 - 0,4$ - asymetria rozkładu słaba,
- $0,4 - 0,6$ - asymetria rozkładu umiarkowana,
- $0,6 - 0,8$ - asymetria rozkładu silna,
- powyżej $0,8$ - asymetria rozkładu bardzo silna.

UWAGI:
1) współczynnik asymetrii Pearsona A_p jest miarą względną i nie ma miana - w związku z tym jest odpowiedni do porównań asymetrii dwóch lub więcej rozkładów (w tym również do porównań rozkładów różnych cech w jednej zbiorowości);
2) w przypadkach, gdy nie jest możliwe obliczenie średniej arytmetycznej lub dominanty nie można wyznaczyć współczynnika asymetrii Pearsona - wówczas stosuje się pozycyjne miary asymetrii.

MIARY ASYMETRII DLA DANYCH POGRUPOWANYCH
Wyznaczenie pozycyjnych i klasyczno-pozycyjnych miar asymetrii sprowadza się do obliczenia stosownych miar tendencji centralnej i miar zmienności, które już poznaliśmy, dlatego skupimy się na sposobach wyznaczania trzeciego momentu centralnego m_3 oraz klasycznego współczynnika asymetrii A_s.

TRZECI MOMENT CENTRALNY I KLASYCZNY WSPÓŁCZYNNIK ASYMETRII W SZEREGU PUNKTOWYM

$$m_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^3 n_i, \quad A_s = \frac{m_3}{s^3} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^3 n_i}{s^3}.$$

Powyższe formuły można przekształcić, zastępując liczebność wskaźnikami struktury

$$m_3 = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^3 \omega_i, \quad A_s = \frac{m_3}{s^3} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^3 \omega_i}{s^3}.$$

lub udziałami procentowymi

$$m_3 = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^3 p_i, \quad A_s = \frac{m_3}{s^3} = \frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^3 p_i}{s^3}.$$

TRZECI MOMENT CENTRALNY I KLASYCZNY WSPÓŁCZYNNIK ASYMETRII W SZEREGU PRZEDZIAŁOWYM

$$m_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i^0 - \overline{x})^3 n_i, \quad A_s = \frac{m_3}{s^3} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i^0 - \overline{x})^3 n_i}{s^3}.$$

Powyższe formuły można przekształcić, zastępując liczebność wskaźnikami struktury

$$m_3 = \sum_{i=1}^{k}(x_i^0 - \overline{x})^3 \omega_i, \quad A_s = \frac{m_3}{s^3} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i^0 - \overline{x})^3 \omega_i}{s^3}.$$

lub udziałami procentowymi

$$m_3 = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{k}(x_i^0 - \overline{x})^3 p_i, \quad A_s = \frac{m_3}{s^3} = \frac{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{k}(x_i^0 - \overline{x})^3 p_i}{s^3}.$$