# Wyznaczniki

Dr Alina Gleska

Instytut Matematyki, Wydział Elektryczny,
Politechnika Poznańska

## Definicja

Niech $A$ będzie macierzą kwadratową wymiaru $2 \times 2$ (czyli rzędu 2). Wyznacznikiem macierzy $A$ nazywamy liczbę zdefiniowaną następująco:

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

## Przykład

Jeżeli $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$, to

$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 4 \cdot 2 = 21 - 8 = 13.$

## Definicja - Reguła Sarrusa

Niech $A$ będzie macierzą kwadratową rzędu 3. Wyznacznikiem macierzy $A$ nazywamy liczbę zdefiniowaną następująco:

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

## Przykład

Jeśli $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, to

$$\det(A) = \left| \begin{array}{rrr|rr} 3 & 4 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 0 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 5 & -1 \end{array} \right. = 3\cdot 7\cdot 2 + 4\cdot 0\cdot 5 + (-2)\cdot 2\cdot(-1) -$$

$$-((-2)\cdot 7\cdot 5 + 3\cdot 0\cdot(-1) + 4\cdot 2\cdot 2) = 42 + 0 + 4 - (-70 + 0 + 16) =$$

$$= 46 - (-54) = 100.$$

**Definicja**

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą $m \times n$. **Minorem** macierzy $A$ nazywamy wyznacznik $M$ macierzy kwadratowej powstałej z macierzy $A$ przez wykreślenie jednego lub kilku wierszy (bądź kolumn).

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie dowolną macierzą wymiaru $n \times n$. Niech $A_{ij}$ będzie macierzą wymiaru $(n-1) \times (n-1)$ otrzymaną z macierzy $A$ przez usunięcie $i$-tego wiersza oraz $j$-tej kolumny. Wówczas $M_{ij}(A) = M_{ij} = det(A_{ij})$ oznacza wyznacznik macierzy $A_{ij}$, który będziemy nazywać $(i, j)$-minorem macierzy $A$, tzn.

$$M_{ij} = det(A_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & - & a_{ij} & - & a_{in} \\ \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & - & a_{nj} & - & a_{nn} \end{vmatrix}$$

## Rozwinięcie Laplace'a

### Definicja

Niech $A \in M_{n\times n}$ oraz $i \in \{1,\ldots,n\}$. Rozwinięciem Laplace'a wyznacznika macierzy $A$ względem $i$-tego wiersza nazywamy liczbę zdefiniowaną następująco:

$$\det(A) =$$

$$= (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \det(A_{i2}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

## Definicja

Niech $A \in M_{n\times n}$ oraz $j \in \{1, \ldots, n\}$. Rozwinięciem Laplace'a wyznacznika macierzy $A$ względem $j$-tej kolumny nazywamy liczbę zdefiniowaną następująco:

$$\det(A) =$$

$$= (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) + (-1)^{2+j} a_{2j} \det(A_{2j}) + \ldots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det(A_{nj}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

## Przykład

Obliczyć wyznacznik macierzy korzystając z rozwinięcia Laplace'a względem pierwszej kolumny:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{2+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -153.$$

## Twierdzenie

Niech $A, B \in M_{n\times n}$ oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wówczas zachodzą własności:

- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$;
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$; $\det(A) = \det(A^T)$;
- $\det(A^r) = (\det(A))^r$ dla dowolnego $r \in \mathbb{N}$;

- Jeśli dowolny wiersz lub dowolna kolumna macierzy $A$ są złożone z zer, to $\det(A) = 0$;
- Jeżeli zamienimy kolejnością dowolne dwa wiersze lub dowolne dwie kolumny macierzy $A$, to wyznacznik zmieni znak na przeciwny;
- Jeżeli dowolne dwa wiersze macierzy $A$ są równe lub są swoją kombinacją liniową, to $\det(A) = 0$;
- Jeśli $a_{ij} = 0$ dla wszystkich $j > i$ lub dla wszystkich $j < i$, to $|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$;
- Jeżeli zamienimy dowolny wiersz (kolumnę) sumą tego wiersza (kolumny) oraz dowolnego wiersza (kolumny) pomnożonego przez stałą różną od 0, to wartość wyznacznika nie ulegnie zmianie.

## Przykład

Policzymy jeszcze raz wyznacznik macierzy $A$, tym razem korzystając z własności wyznaczników.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Użyjemy zielonej 1, aby wprowadzić 0 w pierwszym wierszu. W tym celu mnożymy pierwszą kolumnę przez $(-1)$ i dodajemy do drugiej kolumny; następnie mnożymy pierwszą kolumnę przez $(-2)$ i dodajemy do trzeciej kolumny, a na końcu mnożymy pierwszą kolumnę przez $(-3)$ i dodajemy do ostatniej kolumny:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -7 & -11 \\ 2 & 1 & -5 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}.$$

Teraz zastosujemy rozwinięcie Laplace'a względem pierwszego wiersza:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -7 & -11 \\ 2 & 1 & -5 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -7 & -11 \\ 1 & -5 & -7 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Następnie użyjemy pierwszej kolumny, aby wprowadzić zera w trzecim wierszu:

$$\begin{vmatrix} -4 & -7 & -11 \\ 1 & -5 & -7 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -3 & -27 \\ 1 & -6 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -27 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 9 - 162 = -153.$$